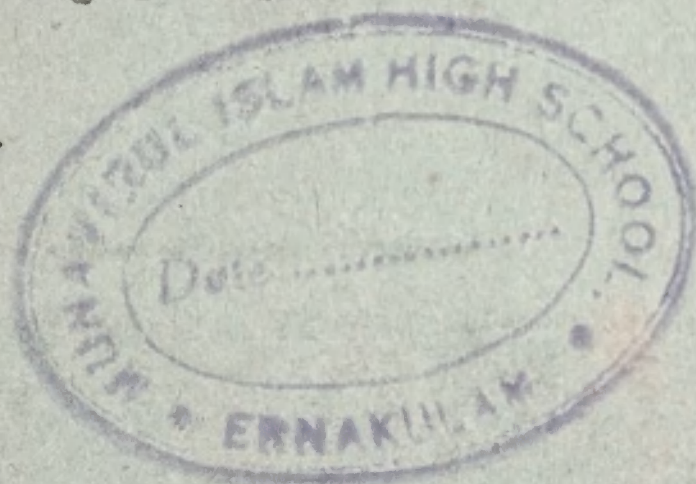
MATHEMATICS

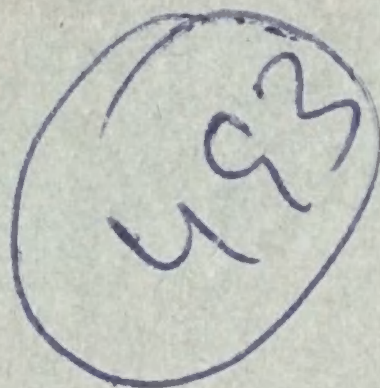
FOR FORM VI

ഗണിതപാഠാവലി

ആറാം ഭാഗം

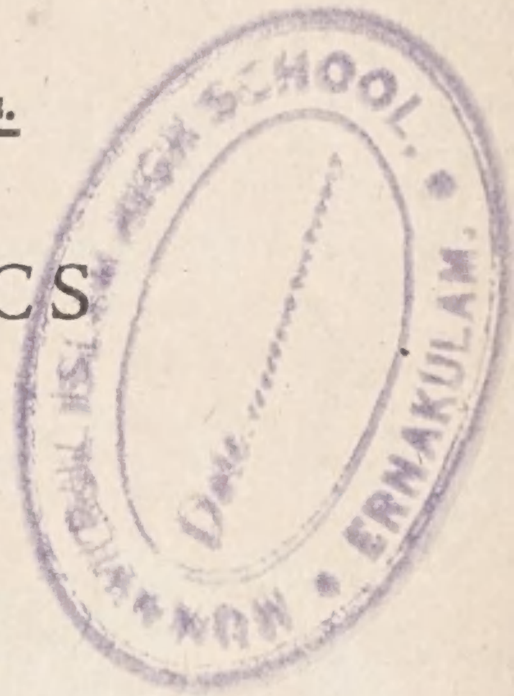


ജി. രാമനാഥയ്യർ ബി. ഏ., എൽ. ടി.



VARIYOTE PUBLICATIONS

VARIYOTE BOOKS: Mathematics Series.



MATHEMATICS

(For Form VI)

ഗണിതപാഠാവലി

ആറാം ഭാഗം

ഗ്രന്ഥകർത്താ

ജി. രാമനാഥയ്യർ, ബി. എ., എൽ. ടി.

VARIYOTE PUBLICATIONS

Prakash Press, Trivandrum.

Price Re. 1-4.

1952

PRINTED AT
THE PRAKASH PRINTING AND PUBLISHING HOUSE,
TRIVANDRUM.

മുഖവുര

"ഗണിതപാഠാവലി" എന്ന ഈ പുസ്തകപംക്തിയിൽ ആറു ഭാഗങ്ങളുണ്ടു്. തിരു-കൊച്ചിയിലെ ഏകീകരിച്ച പാഠപദ്ധതിയിൽ ഒന്നാം ഫാറംമുതൽ ആറാം ഫാറം വരെയുള്ള പുതിയ മാത്തമാററിക്സ് സിലബസ് അനുസരിച്ചെഴുതിയിട്ടുള്ളവയാണു്. ഈ പുസ്തകങ്ങൾ. ആറാം ഫാറത്തിലേക്കുള്ള ഈ പുസ്തകത്തിൽ മുൻ ക്ലാസ്സുകളിലെ പാഠവിഷയങ്ങളുടെ ഒരു ചുരുക്കവും അവയെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഏതാനും അഭ്യാസങ്ങളും ചേർത്തിട്ടുണ്ടു്. അതാണു് ഒന്നും അഞ്ചും പത്തും അദ്ധ്യായങ്ങൾ.

പ്രധാന സാങ്കേതികപദങ്ങൾ സംഗ്രഹിച്ചു് ഒരു ശബ്ദാവലിയായി ഗ്രന്ഥാരംഭത്തിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ടു്. മലയാളശൈലിയോടു യോജിപ്പിച്ചു കൊണ്ടുപോകാവുന്ന ഇംഗ്ലീഷുവാക്കുകൾ അതേപടി സ്വീകരിക്കാമെങ്കിലും അവയ്ക്കു തുല്യമായ ഭാഷാപദങ്ങളാണു് സാധാരണയായി ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നതു്. അതുകൊണ്ടു് രണ്ടും ഈ ശബ്ദാവലിയിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ടു്. പദങ്ങളെല്ലാം വിഷയക്രമമനുസരിച്ചാണു് അടുക്കിയിരിക്കുന്നതു്; അകാരാദിക്രമത്തിലല്ല. ഇതിന്റെ ഉദ്ദേശം രൂപത്തിലും അർത്ഥത്തിലും പദങ്ങൾതമ്മിലുള്ള സാമ്യവും വ്യത്യാസവും താരതമ്യപ്പെടുത്തിനോക്കാൻ സൗകര്യമുണ്ടായിരിക്കണമെന്നുള്ളതാണു്.

സ്കൂൾഫൈനൽ പരീക്ഷയ്ക്കു് മാത്തമാററിക്സിൽ രണ്ടു ചോദ്യക്കടലാസുണ്ടു്. സംഖ്യാഗണിതം മുഴുവനും ബീജഗണിതത്തിൽ നാലാം ഫാറത്തിലുള്ള ഭാഗംമാത്രവും അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ചോദ്യങ്ങളാണു് ആദ്യത്തെ ചോദ്യക്കടലാസിൽ. ബീജഗണിതത്തിലെ ബാക്കി ഭാഗങ്ങളും ക്ഷേത്രഗണിതം മുഴുവനും രണ്ടാമത്തേതിലും ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

കഴിഞ്ഞ ഏതാനും കൊല്ലങ്ങളായി സ്കൂൾഫൈനൽ പരീക്ഷയ്ക്കു കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ വിഷയക്രമമനുസരിച്ചു് തെരഞ്ഞെടുത്തു് അതാതു് അദ്ധ്യായങ്ങളിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ടു്. ഇവ S. S. L.C. Questions എന്നു പ്രത്യേകം സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുമുണ്ടു്. പ്രാരംഭാദ്ധ്യായങ്ങളായ ഒന്നും അഞ്ചും പത്തും അദ്ധ്യായങ്ങളിലെ ചോദ്യം മുഴുവനും സ്കൂൾഫൈനൽ ചോദ്യങ്ങളായതുകൊണ്ടു് അങ്ങനെ പ്രത്യേകം സൂചിപ്പിച്ചിട്ടില്ല. ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങളും പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ടു്.

തിരുവിതാംകൂറിലും കൊച്ചിയിലും ഇപ്പോൾ ഏകീകരിച്ച സ്കൂൾ ഫൈനൽ പരീക്ഷയാണു് നടപ്പിലാക്കിയിരിക്കുന്നതു്. അതിലെ ചോദ്യക്കടലാസ്സിന്റെ മാതൃക മനസ്സിലാക്കുന്നതിലേക്കു് രണ്ടു ചോദ്യക്കടലാസ്സുകൾ അതേപടി പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ടു്.

ഗ്രന്ഥകർത്താ.

തിരുത്തുകൾ

പുറം.	വരി.	തെററ്.	തിരുത്ത്.
30	15	$348\frac{1}{3}$ പവ.	$696\frac{2}{3}$ പവ.
32	4	$3898\frac{2}{3}$	$3798\frac{2}{3}$
33	13	വ്യാസം	വ്യാപ്തം
41	17	$13\frac{15}{16}$	$13\frac{5}{16}$
68	16	$a(x-y)$	$a(x+y)$
78	6	$6(1-x)^2$	$6(1-x^2)$
88	13	$x^2=225$	$25x^2=225$
112	24	[ചോദ്യം 22-ൽ $AC=3''$ എന്നു കൂടിചേർക്കണം]	
133	14	$CT=AB$	$CT \perp AB$

വിഷയവിവരം

അടയാളങ്ങൾ

ഉ. ഘ.	ഉത്തമഘടകം	ലി.	ലിങ്ക്സ്
ല. ഗു.	ലഘുഗുണിതം	ചെ.	ചെയിൻ
ഒ. ദ.	ഒന്നാം ദശാംശം	മി. മീ.	മില്ലിമീററർ
ര. ദ.	രണ്ടാം ദശാംശം	സെ. മീ.	സെൻറിമീററർ
മൂ. ദ.	മൂന്നാം ദശാംശം	മീ.	മീററർ
പ്ര. വ.	പ്രതിവർഷം	കി. മീ	കിലോമീററർ
പ്ര. മാ.	പ്രതിമാസം	ച.	ചതുരശ്ര—
രു.	രുപാ	ക്യൂ.	ക്യൂബിക്
ണ.	അണ	ഘ.	ഘന—
പ	പവൻ	ഇട.	ഇടങ്ങഴി
ഷി.	ഷില്ലിംഗ്	ഗ്യാ.	ഗ്യാലൻ
പെ.	പെൻസ്	ഔ.	ഔൺസ്
മ.	മണിക്കൂർ	പൗ.	പൗണ്ട്
മി.	മിനിട്ട്	ഹൺ.	ഹൺഡ്രഡ് വെയിററ്
സെ.	സെക്കൻഡ്	കി. ഗ്രാ.	കിലൊഗ്രാം
മ./	മണിക്കൂറൊന്നിനു്	∴	അതുകൊണ്ട്
മി./	മിനിട്ടൊന്നിനു്	°	ഡിഗ്രി
സെ /	സെക്കൻഡൊന്നിനു്	=	സമാന്തരം
" ഇ.	ഇഞ്ചു്	≡	സർവസമം
അ.	അടി	∠	ത്രികോൺ
ഗ.	ഗജം	⊥	ചതുരം
ഫർ.	ഫർലാംഗ്	$\|\|^m$.	സമാന്തരചതുർഭുജം

സാങ്കേതികശബ്ദാവലി

സംഖ്യാഗണിതം Arithmetic

- സൂത്രവാക്യം formula
- വർഗ്ഗം square
- വർഗ്ഗമൂലം square root
- ചുരുക്കി correct to (decimal place)

- അനുപാതം, അംശബന്ധം } ratio
- തുല്യാനുപാതം proportion

- ഘടകം factor
- ഗുണിതം multiple

- കടം, ബാദ്ധ്യത liabilities
- മുതൽ, ആസ്തി assets
- വീതാംശം dividend

- സാധാരണ പലിശ simple interest
- നിരക്ക് rate
- കൂട്ടുപലിശ compound interest
- മുതൽ principal
- മുതൽ പലിശ amount

- ബിൽ bill of exchange
- ഡിസ്കൗണ്ട്, വട്ടം discount
- മുഖവില face value
- കൈമാററവില present value

- കൈമാററ നിരക്ക് rate of exchange

- അളവ് dimension
- ക്ഷേത്രഫലം area
- വ്യാപ്തം, ഘനയളവ് } volume
- പാദരേഖ base line
- ബാഹുരേഖ off-set
- മുറിപാട് cross section
- പുറമ്പാട് outer surface (except the ends)
- അകമ്പാട് inner surface
- ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം total surface
- സ്തംഭം solid of uniform cross-section
- കോണസ്തംഭം prism
- വൃത്തസ്തംഭം, ഗോളസ്തംഭം } cylinder
- ത്രികോണസ്തംഭം triangular prism
- സ്തൂപിക solid tapering to a point
- കോണ സ്തൂപിക pyramid
- വൃത്തസ്തൂപിക, സൂചീഖാതം, സൂചീസ്തംഭം } cone
- അഗ്രം, ശീർഷം vertex
- ചുവട് base
- ചരിഞ്ഞ ഉയരം slant height of a cone
- ഗോളം sphere
- അർദ്ധഗോളം hemisphere

ഓഹരി share
ഓഹരിത്തുക share value
ക്ലിപ്താദായ ഓഹരി preference share
മൂലധനം capital
അധികൃതമൂലധനം authorised capital
വിററുകഴിഞ്ഞ മൂലധനം subscribed capital
പിരിച്ചെടുത്ത മൂലധനം paid up capital
നിലനിർത്തിയ മൂലധനം reserved liability
ആദായം dividend; income.
മുഖവില face value
കമ്പോളവില market value
കമ്പോളനിരക്ക് quotation
മുടക്കുമുതൽ investment
ഏററം, ഏററവില premium
ഇറക്കം, ഇറക്കവില discount
തരകൻ broker
തരക് brokerage

ബീജഗണിതം Algebra

ബീജം algebraic letter; variable
ബീജാർത്ഥം value of letter; root of an equation.
അർത്ഥം, അർത്ഥസംഖ്യ value

ചുരുക്കുക simplify
വലയം bracket
ചിഹ്നം sign
രാശി term
അധികരാശി positive term
ന്യൂനരാശി negative term
ഗുണകം coefficient
സജാതീയരാശി like term
വിജാതീയരാശി unlike term
പൊതുഘടകം common factor
ഉത്തമഘടകം highest common factor; H. C. F.
പൊതുഗുണിതം common multiple
ലഘുഗുണിതം least common multiple; L. C. M.
വിഘടനം factorisation

ഘാതം, ഡിഗ്രി power; degree; index
മൂലം, രൂട്ട് root
ഘനം cube
ഘനമൂലം cube root

മാതൃകാരൂപം standard form
ഭിന്നരാശി algebraic fraction
സമച്ഛേദം common denominator
രാശിമാല expression
വർഗ്ഗാദിരാശിമാല quadratic expression
വർഗ്ഗമാല perfect square of an expression
വർഗ്ഗവ്യത്യാസം difference of squares

സൂത്രവാക്യം formula
ബീജവാക്യം identity
സമവാക്യം equation
ആദിസമവാക്യം simple equation

ബീജദ്വയസമവാക്യം equation in two variables.
അന്യോന്യസമവാക്യം simultaneous equations
വർഗ്ഗാദി സമവാക്യം quadratic equation
ഇടംവലം നീക്കുക transpose

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക solve

സമവലയം grouping of terms
ബീജകല്പനം substitution of a letter
അർത്ഥകല്പനം sustitution of a number

അക്ഷഗണിതം Coordinate Geometry

ഗ്രാഫ്, രേഖാചിത്രം graph
അക്ഷരേഖ axis
പാദാക്ഷം, പാദരേഖ x-axis
ഊർദ്ധ്വാക്ഷം, ഊർദ്ധ്വരേഖ y-axis
അക്ഷാംശം coordinate
പാദം x-coordinate
ഉയരം y-coordinate
കേന്ദ്രം origin
ചതുരഖണ്ഡം quadrant
തോത്, യൂണിറ്റ് } scale; unit

ക്ഷേത്രഗണിതം Geometry

വാക്യപ്രകരണം theoretical geometry
ക്രിയാപ്രകരണം practical geometry
നിർവചനം definition
വാക്യം theorem
പ്രത്യക്ഷവാക്യം axiom
ഉപവാക്യം corollary
പ്രതിലോമവാക്യം converse
ക്രിയ construction

സിദ്ധം conclusion
സർവസമം congruent
അർദ്ധാംശിക്കുക bisect
സന്ധിക്കുക meet
ഖണ്ഡിക്കുക cut; intersect

ക്ഷേത്രം enclosed figure
പാദം base
ഉയരം altitude; height
ശീർഷം vertex
ഭുജം side
ചതുരഭുജം perpendicular side
ബിന്ദു point
മദ്ധ്യബിന്ദു mid point
ചരബിന്ദു moving point
സ്ഥിരബിന്ദു fixed point
സ്പർശബിന്ദു point of contact
ചക്രബിന്ദുക്കൾ cyclic points
സന്ധി point of intersection
ബിന്ദുപഥം, ലോക്കസ് locus

രേഖ line
ഋജുരേഖ strainght line
വക്രരേഖ curved line
സമാന്തരം parallel
ചതുരം perpendicular; (recetangle)
ഛേദകരേഖ transversal
രേഖാ ഖണ്ഡം intercept
സ്പർശരേഖ, സ്പർശകം } tangent
മദ്ധ്യഭാഗിനി, മദ്ധ്യഭാജി } bisector
വിക്ഷേപരേഖ, വിക്ഷേപം } projection
കോൺ angle
ചതുരക്കോൺ, സമകോൺ } right angle
ചെറുകോൺ acute angle
പെരുങ്കോൺ obtuse angle
അകക്കോൺ, ഉൾക്കോൺ } interior angle
പുറങ്കോൺ exterior angle
ഇടക്കോൺ included angle
അയൽക്കോൺ adjacent angle
മേൽക്കോൺ angle of elevation
കീഴ്ക്കോൺ angle of depression
സമ്മുഖകോൺ subtended angle
വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോൺ angle in a segment
എതിർകോൺ opposite angle
ശീർഷകോൺ vertical angle
സദൃശകോൺ corresponding angle
വിപരീതകോൺ alternate angle
ത്രികോൺ triangle
ചതുരത്രികോൺ right angled triangle

സമപാർശ്വ ത്രികോൺ isosceles triangle
സമഭുജത്രികോൺ equilateral triangle
കർണ്ണം hypotenuse; diagonal
ബഹുഭുജം polygon
ചതുർഭുജം quadrilateral
ചക്രചതുർഭുജം cyclic quadrilateral
സമാന്തരചതുർഭുജം, സാമാന്തരികം } parallelogram
ചതുരം, ചതുരക്ഷേത്രം, ദീർഘചതുരം } rectangle
സമചതുർഭുജം rhombus
സമചതുരം square
ട്രപ്പീസിയം, ലംബകം, സമലംബകം } trapezium
വൃത്തം circle
കേന്ദ്രം centre
വ്യാസം diameter
വ്യാസാർദ്ധം, ആരം radius
ചാപം arc
ജ്യാവ് chord
വൃത്തഖണ്ഡം segment
വൃത്താംശം sector
പരിധി circumference
അർദ്ധവൃത്തം semicircle
സമവൃത്തം equal circle
സമാന്തരവൃത്തം, സവൃത്തം, ഏകകേന്ദ്രവൃത്തം } concentric circle
പരിവൃത്തം circum circle
പരിവൃത്തകേന്ദ്രം circum centre
ആന്തരവൃത്തം incircle
സ്പർശവൃത്തം circle of contact

ഗണിതപാഠാവലി

ആറാം ഭാഗം

അദ്ധ്യായം I

സംഖ്യാഗണിതം: പ്രാരംഭം

സംഖ്യകളെയും ചതുഷ്ക്രിയകളെയും ആധാരമാക്കി സംഖ്യാഗണിതത്തിലെ തത്വങ്ങൾ രൂപംപ്രാപിക്കുന്നു. ശരാശരി, ശതമാനം, അനുപാതം, പലിശ, ക്ഷേത്രമാനം മുതലായ വിഷയങ്ങളെല്ലാം ആ തത്വങ്ങളുടെ പ്രയോഗത്തെ വിശദീകരിക്കുന്നവയാണ്. ഈ ഗ്രന്ഥാവലിയിലെ പൂർവ്വഭാഗങ്ങളിൽ പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കുന്ന വിഷയങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ഏതാനും അഭ്യാസങ്ങളാണ് ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നതു്.

അഭ്യാസം 1

1. 1940 ഫെബ്രുവരി 9-ാനു- മുതൽ 1940 സെപ്റ്റംബർ 6-ാനു- വരെ രണ്ടു ദിവസവുമുൾപ്പെടെ എത്ര ദിവസമുണ്ടു്?

2. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഉത്തമഘടകം 17; ലഘുഗുണിതം 204; ഒരു സംഖ്യ 51. മറേറ സംഖ്യ എത്ര ?

   [$17 \times 204 \div 51$]

3. എളുപ്പവഴിയിൽ ഫലം കാണുക.

$$\frac{3{\cdot}258 \times 3{\cdot}258 - 1{\cdot}439 \times 1{\cdot}439}{3{\cdot}258 - 1{\cdot}439}$$

$$23756 \times 23756 - 23746 \times 23746$$

$$[\ a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)\ ]$$

4. 10·5 കി. ഗ്രാം = ·2955 ഹൺ; എന്നാൽ 15·75 കി. ഗ്രാം എത്ര ഹൺ. രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനംവരെ ചുരുക്കി കാണുക.

5. 1 ഫ്റാങ്ക് = 2 പെൻസ്; 1 ഡാളർ = 4 ഷി. 2 പെ; എന്നാൽ ഒരു ഡാളറും ഒരു ഫ്റാങ്കും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമെന്ത്.

6. കൊല്ലത്തുനിന്നു പുറപ്പെട്ട് തിരുവനന്തപുരത്ത് എത്തുന്നതിനുള്ള റെയിൽ യാത്രയുടെ സമയവിവരം. (മണി, മിനിട്ട്)

കൊല്ലം	6·19	8·33	10·35	1·23	3·28	4·41	7·21	3·15
തിരുവനന്തപുരം	8.57	11·10	2·6	4·15	6·6	6·50	10·15	5·40

ഒരു യാത്രയ്ക്കു വേണ്ട ശരാശരി സമയം എന്ത്. അത് ഏററവും കുറഞ്ഞ സമയത്തെക്കാൾ എത്ര കൂടുതൽ. ഏററവും കൂടിയ സമയത്തെക്കാൾ എത്ര കുറവ്.

7. x സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി = p; y സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി = q; എന്നാൽ എല്ലാ സംഖ്യകളുടെ തുകയും ശരാശരിയും കാണുക.

8. ഒരു ക്ലാസ്സിൽ m ആൺകുട്ടികളും n പെൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. അവരുടെ ശരാശരി വയസ്സ് a വർഷവും ആൺകുട്ടികളുടെ തനിച്ചുള്ള ശരാശരി വയസ്സ് b വർഷവുമാകുന്നു. പെൺകുട്ടികളുടെ തനിച്ചുള്ള ശരാശരി വയസ്സ് എത്ര.

9. വർഷാരംഭത്തിൽ ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള 115 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 15·5 ആയിരുന്നു. അതേ വർഷത്തിൽത്തന്നെ 16·4 ശരാശരി വയസ്സുള്ള 4 കുട്ടികൾ ക്ലാസ്സുവിട്ടു പോവുകയും 14·6 ശരാശരി വയസ്സുള്ള 9 കുട്ടികൾ വന്നു ചേരുകയും ചെയ്താൽ ആണ്ടവസാനത്തിൽ ആ ക്ലാസ്സിലുള്ള കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സെന്ത്. (രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു ശരിയായി കാണുക)

ശതമാനം ഭിന്നസംഖ്യയുടെ മറെറാരു രൂപമാണ്. അതിൽ ഛേദം എപ്പോഴും 100 ആയിരിക്കും. $14\% = \frac{14}{100}$. ലാഭനഷ്ടം

ശതമാനമായി കണക്കാക്കുന്നതു് വാങ്ങിയ വിലയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണു്. വാങ്ങിയവില ഛേദത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തും ലാഭനഷ്ടത്തുക അംശത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തും വരും. ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുന്നതു് ശതമാനമായി കണക്കാക്കുമ്പോൾ ആ സംഖ്യ ഛേദമായും കൂടുതൽകുറവു് അംശമായും എടുക്കണം.

അഭ്യാസം 2

1. ഒരു യന്ത്രം മൂന്നു കച്ചവടക്കാരുടെ കയ്യിൽകൂടി ക്രയവിക്രയം ചെയ്തപ്പോൾ അതിന്റെ വില 45% കൂടി. ഒന്നാമത്തെ വ്യാപാരി 25% ലാഭവും രണ്ടാമത്തെയാൾ 20% ലാഭവും എടുത്താൽ മൂന്നാമത്തെ ആളിന്റെ ലാഭനഷ്ടം എത്ര ശതമാനം.

2. ഒരു സ്കൂളിലെ ആറാംഫാറം ഏ ഡിവിഷനിൽനിന്നു് 60% വിദ്യാർത്ഥികളും ബി ഡിവിഷനിൽനിന്നു് 40% പേരും പരീക്ഷയിൽ ജയിച്ചു. ഏ യിലും ബി യിലും തോററവരുടെ അനുപാതം 7:9 ആയിരുന്നു. ഏ യിൽ 35 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ ബി യിൽ എത്രപേർ ഉണ്ടായിരുന്നു.

3. ഒരു ഏജൻറിനു് വില്പനയിൽ $6\frac{1}{4}$% കമ്മിഷൻ കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ 100 രൂ. കമ്മിഷൻ കിട്ടുവാൻ എത്ര രൂപയ്ക്കു സാമാനം വില്ക്കണം.

4. ഒരു മോട്ടാർ ബസ്സിലെ ചാർജ്ജു് 25% കൂട്ടിയപ്പോൾ ആകെ വരവു് 10% മാത്രമേ കൂടിയുള്ളു. എന്നാൽ യാത്രക്കാരുടെ സംഖ്യ എത്ര ശതമാനം കുറഞ്ഞു.

5. ഒരു സാമാനത്തിന്റെ പരസ്യവില x രൂപയും വില്ക്കുമ്പോൾ അനുവദിക്കുന്ന ഡിസ്കൌണ്ടു d ശതമാനവുമാണു്. y രൂപ രൊക്കം കൊടുത്തു് ആ സാധനം വാങ്ങാമെങ്കിൽ $100\,(x-y) = x\,d$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. A യും B യും രണ്ടു വ്യാപാരികളാണു്. 180 രൂപാ വിലയുള്ള ഒരു ഗ്രാമഫോൺ A 10% ലാഭത്തിലും അതേ വിലയുള്ള മറെറാരു

ഗ്രാമഫോൺ വിററ വിലയുടെ 10% ലാഭം കിട്ടത്തക്കവണ്ണം B യും വിൽക്കുന്നു. ഓരോരുത്തരുടെയും വിററ വില കാണുക.

7. ഒരു സാമാനത്തിന്റെ വിററവില 10 ണ. കുറച്ചതിന്റെ ഫലമായി അതിൽനിന്നു് 12% ലാഭം ഉണ്ടായിരുന്നതു് 8% നഷ്ടമായിത്തീർന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ വാങ്ങിയ വിലയെന്തു്.

8. മൂന്നുമാസം നീണ്ടുനിന്ന ഒരു യുദ്ധത്തിൽ ആദ്യത്തെ മാസം ഭടന്മാരിൽ 20% പേക്കും ബാക്കിയുള്ളവരിൽ 10% പേക്കു് രണ്ടാമത്തെ മാസത്തിലും ബാക്കിയുള്ളവരിൽ 4% പേക്കു മൂന്നാമത്തെ മാസത്തിലും മുറിവേററു. പിന്നീടു 34560 ഭടന്മാർ ശേഷിച്ചാൽ ആദ്യമുണ്ടായിരുന്നവർ എത്ര. ഓരോ മാസവും മുറിവേററതു് എത്രപേക്കു്.

9. ഒരു തുകയുടെ 15% 27 പ. 10 ഷി. ആയാൽ ആ തുകയുടെ $16\frac{1}{2}$% എത്ര.

10. ഒരു സാമാനം വിററതിൽ അതിന്റെ പരസ്യവിലയുടെ 12% കമ്മിഷൻ കൊടുത്തശേഷം 12% ലാഭം കിട്ടുന്നു. അതിന്റെ അസ്സൽവില 6 രു. 14 ണ.യാണെങ്കിൽ അതിന്റെ പരസ്യവിലയെന്തു്.

11. 1944-ൽ സാമാനങ്ങളുടെ വില 1937-ലെ വിലയെക്കാൾ പൊതുവെ 250% കൂടുതലാണു്. എന്നാൽ 1937-ൽ 500 രൂപാ ശമ്പളം കിട്ടുന്നതും 1944-ൽ 1500 രു. കിട്ടുന്നതും താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ ഏതാണു നല്ലതു്. കാരണമെന്തു്.

12. ഒരു വ്യാപാരി സാമാനങ്ങളുടെ അസ്സൽവിലയിൽനിന്നു് 20% കൂട്ടി പരസ്യവില കുറിക്കുന്നു. സാമാനങ്ങളിൽ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം 10% ഡിസ്കൌണ്ടുവെച്ചും ബാക്കി $7\frac{1}{2}$% ഡിസ്കൌണ്ടുവെച്ചും വിൽക്കുന്നു. എന്നാൽ അയാളുടെ ലാഭം എത്ര ശതമാനം.

13. ഒരു പുസ്തകവ്യാപാരി പുസ്തകങ്ങളുടെ കുറിപ്പു വിലയിൽ 12% ഡിസ്കൌണ്ടു കുറച്ചു വിൽക്കുന്നതിനു പുറമേ 100 പ്രതികൾ ഒന്നായി വാങ്ങുന്നവക്കു് 10 പ്രതികൾ കമ്മിഷനും കൊടുക്കുന്നു. എന്നാൽ 100 പ്രതികൾ വാങ്ങിക്കുന്ന ആളിനു യഥാർത്ഥത്തിൽ എത്ര ശതമാനം ഡിസ്കൌണ്ടു കിട്ടുന്നു എന്നു കാണുക.

14. ഒരു സാമാനം ഇപ്പോൾ 20% ലാഭത്തിനു വിററവരികയാണു്. അതിന്റെ വാങ്ങിയവില 15%വും വിററവില 10%വും വർദ്ധിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ലാഭശതമാനമെന്തു്.

15. വാങ്ങിയ വിലയുടെ 25% കൂട്ടി വില കുറിച്ചിരിക്കുന്ന സാധനം എത്ര ശതമാനം ഡിസ്കൌണ്ടനുവദിച്ചു വിററാൽ കച്ചവടക്കാരനു് 15% ലാഭം കിട്ടും.

16. 13 സാധനങ്ങളുടെ വാങ്ങിയ വില 12 സാധനങ്ങളുടെ വിററവിലയ്ക്കു തുല്യമായിരുന്നാൽ ലാഭം എത്ര ശതമാനം.

17. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ 6000 രൂ. കൊടുത്തു വാങ്ങിയ തൻെറ ചരക്കുകൾക്കു് വാങ്ങിയ വിലയെക്കാൾ 30 ശതമാനംകൂട്ടി വില കുറിക്കുന്നു. അയാൾ രൊക്കം വിലയ്ക്കു വിൽക്കുമ്പോൾ 10 ശതമാനം ഡിസ്കൌണ്ടും കടമായി വിൽക്കുമ്പോൾ 5 ശതമാനം ഡിസ്കൌണ്ടും അനുവദിക്കുന്നു. ആകെയുള്ള ചരക്കിൻെറ $\frac{2}{5}$ ഭാഗം രൊക്കം വിലയ്ക്കും ബാക്കി കടമായും വിററാൽ അയാളുടെ ആകെ ലാഭം എന്തു്.

18. ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥൻ ഒരു വൎഷത്തിൽ അദ്ദേഹത്തിൻെറ വരവിൽ രൂപയ്ക്കു് 6 പൈ ആദായനികുതി കൊടുക്കുകയും ശിഷ്ടമുള്ളതിൻ്റെ 77% ചിലവാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. അടുത്ത വൎഷം അദ്ദേഹത്തിൻെറ ശമ്പളം 20% കൂടുകയും ആദായനികുതി രൂപയ്ക്കു് 8 പൈ ആവുകയും നികുതി കൊടുത്തശേഷമുള്ള തുകയിൽ 69% ചിലവാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു എന്നാൽ ഈ രണ്ടു വൎഷങ്ങളിലും അദ്ദേഹം മിച്ചം വെയ്ക്കുന്ന തുകകളുടെ അംശബന്ധമെന്തു്.

19. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ റാത്തലൊന്നിനു് 2 രൂ. 8 ണ. വിലയുള്ള 112 റാത്തൽ തേയിലയും റാത്തലൊന്നിനു് 1 രൂ. 10 ണ. വിലയുള്ള 120 റാത്തൽ തേയിലയും വാങ്ങി രണ്ടുംകൂടി കലൎത്തി വിൽക്കുന്നു. 5% കച്ചവടവാശി നീക്കി 16% ലാഭം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ ഒരു റാത്തൽ കലൎപ്പുതേയിലയുടെ കുറിച്ചിരിക്കുന്ന വിലയെന്തു്.

20. രണ്ടു വാച്ചുകളെ തുല്യവിലയ്ക്കു വിററപ്പോൾ ഒന്നിൽ 20% ലാഭവും മറേറതിൽ 20% നഷ്ടവും ഉണ്ടായി. എന്നാൽ രണ്ടിലുംകൂടി കിട്ടിയതു ലാഭമോ നഷ്ടമോ എത്ര ശതമാനം.

21. ഒരു കച്ചവടക്കാരനു് 294 രൂപയ്ക്കു് ഒരു സൈക്കിൾ വിററപ്പോൾ 12% ലാഭം കിട്ടിയാൽ അതിൻെറ വാങ്ങിയ വിലയെന്തു്.

ഈ സൈക്കിളിനെ വാങ്ങിയ വിലയുടെ 20% കൂട്ടി പരസ്യവില നിശ്ചയിച്ചു. അതിൻെറ 10% ഡിസ്കൌണ്ടുവെച്ചു വിററാൽ കച്ചവടക്കാരനു് ലാഭമോ നഷ്ടമോ എത്ര ശതമാനം.

അനുപാതവും ഭിന്നസംഖ്യയുടെ മറെറാരു രൂപമാണു്. $4:5 = \frac{4}{5}$. അനുപാതത്തിനു് അംശബന്ധം എന്നും പറയാം. ഒരു അനുപാതംകൊണ്ടു് ഒരു സംഖ്യയെ ഗുണിച്ചാൽ ആ അനുപാതമനുസരിച്ചു സംഖ്യ വ്യത്യാസപ്പെടും. $\frac{4}{5} \times 20 = 16$; $\therefore 4 : 5 = 16 : 20$. സമമായ രണ്ടു് അനുപാതം ചേൎന്നാൽ ഒരു തുല്യാനുപാതമാകും. ഒരു സംഖ്യ കൂടുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്യുന്ന അനുപാതത്തിൽ തന്നെ മറെറാരു സംഖ്യയും കൂടുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്താൽ അവ അനുപാതക്രമത്തിൽ വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു; മറിച്ചായാൽ വിപരീതാനുപാതക്രമത്തിലും.

6 പുസ്തകത്തിന്റെ വില 15 രൂ.; 8 പുസ്തകത്തിന്റെ വിലയെന്തു്. പുസ്തകം $\frac{8}{6}$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ കൂടുന്നു. വിലയും അതേ അനുപാതത്തിൽകൂടും. $\therefore 15 \times \frac{8}{6} = 20$ രൂ.

7 പേർ 12 ദിവസംകൊണ്ടു് ഒരു ജോലി ചെയ്തുതീൎക്കുന്നു. 6 പേർ എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു് ആ ജോലി ചെയ്തുതീൎക്കും

ജോലിക്കാർ $\frac{6}{7}$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ കുറയുന്നു; സമയം $\frac{7}{6}$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ കൂടും. $12 \times \frac{7}{6} = 14$ ദിവസം.

120 നെ 2 : 3 : 7 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വീതിക്കുക.

$$120 \times \frac{2}{12} = 20; \quad 120 \times \frac{3}{12} = 30; \quad 120 \times \frac{7}{12} = 70.$$

പങ്കുകച്ചവടത്തിൽ കിട്ടുന്ന ലാഭം വീതിക്കുന്നതു് ഒരു അനുപാതമനുസരിച്ചായിരിക്കും. ഓരോരുത്തരും മുടക്കിയ മുതലിന്റെ തുകയും അതു മുടക്കിയ കാലവും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന ഫലമാണു് അനുപാതക്രമത്തിൽ വരുന്ന സംഖ്യകൾ.

അഭ്യാസം 3

1. 5നു് ഒരു സംഖ്യയോടുള്ള അനുപാതം ആ സംഖ്യയ്ക്കു് 45 നോടുള്ള അനുപാതത്തിനു തുല്യമാണു്. സംഖ്യ എത്ര.

2. ഒരാളിന്റെ പക്കൽ ഒററ രൂപയും കാൽ രൂപയും രണ്ടണത്തുട്ടും ചേൎന്നു് ആകെ 525 നാണയങ്ങൾ ഉണ്ടു്. ഇവയുടെ വില യഥാ

ക്രമം 29 : 9 : 5 എന്ന അനുപാതത്തിലാണെങ്കിൽ ഓരോ ഇനം നാണയവും എത്രയുണ്ടു്.

3. ഒരു ജോലി 27 ദിവസംകൊണ്ടു തീൎക്കാൻ 40 ജോലിക്കാരെ നിയമിക്കുന്നു. പകുതി ജോലി തീൎന്നപ്പോൾ 10 ജോലിക്കാരെക്കൂടി നിയമിച്ചാണു് ക്ലിപ്തദിവസം ജോലി തീൎത്തതു്. എന്നാൽ എത്ര ദിവസം കഴിഞ്ഞു് കൂടുതൽ ജോലിക്കാരെ നിയമിച്ചു.

4. ഒരു പറ നെല്ലിനു് 9 ണ. വിലയുള്ളപ്പോൾ 10 ആളുകൾക്കു് 4 ആഴ്ചത്തെ ജോലിക്കു് 105 രൂ. കൂലിയുണ്ടു്. നെല്ലു വിലയെ ആശ്രയിച്ചു് കൂലിനിരക്കിനു വ്യത്യാസം വന്നതുനിമിത്തം 5 പേൎക്കു് 19 ആഴ്ചത്തെ ജോലിക്കു് 665 രൂ. കൂലി കൊടുക്കേണ്ടിവന്നാൽ നെല്ലുവില എന്തായിരിക്കും.

5. മൂന്നുപേർ ചേൎന്നു് ഒരു യാത്ര ചെയ്യുകയും അതിലേക്കു് ഒരാൾ 75 രൂപയും രണ്ടാമൻ 68 രൂപയും മൂന്നാമൻ 37 രൂപയും ചിലവാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ആകെ ചിലവു് അവർ തമ്മിൽ യഥാക്രമം 4 : 3 : 2 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വീതിച്ചെടുക്കണമെന്നു നിശ്ചയിച്ചാൽ അതനുസരിച്ചു് എങ്ങനെ കണക്കുതീൎക്കണം.

6. ഒരാൾ 2000 രൂ. മുതൽ മുടക്കി ഒരു വ്യാപാരം തുടങ്ങുകയും അഞ്ചുമാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ മറ്റൊരാൾ 1500 രൂ. മുതൽ മുടക്കി അതിൽ പങ്കു ചേരുകയും ചെയ്യുന്നു. അതിനുശേഷം 20 മാസം വ്യാപാരം നടത്തിയതിൽ 2000 രൂ. ലാഭം കിട്ടി. ഓരോരുത്തരുടെയും ലാഭവീതം എന്തു്.

7. A, B, C ഇവർ ചേൎന്നുനടത്തിയ ഒരു വിനോദയാത്രയ്ക്കു് A 6 രൂ. 8 ണ. യും B 7 രൂ. 12 ണ. യും C 8 രൂ. 4 ണ. യും ചിലവു ചെയ്തു. ആകെ ചിലവു് അവർ തമ്മിൽ യഥാക്രമം $\frac{1}{3} : \frac{5}{12} : \frac{1}{2}$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ വീതിച്ചെടുക്കാമെന്നു നിശ്ചയിച്ചാൽ എങ്ങനെ കണക്കുതീൎക്കണം.

8. ഒരു പട്ടണത്തിൽ ആളൊന്നിനു് ദിവസംപ്രതി 12 ഔൺസു് അരി വീതം 45 ദിവസത്തേക്കു വേണ്ട അരിക്കു് ഏൎപ്പാടു ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ 20% കുറച്ചേ അരി കിട്ടുന്നുള്ളു. കിട്ടിയതു് 54 ദിവസത്തേക്കു തികയണമെങ്കിൽ ആളൊന്നിനു് ദിവസംപ്രതി എത്ര ഔൺസു് കൊടുക്കാം.

9. Aയും Bയും പങ്കുചേൎന്നു് യഥാക്രമം 4000 രൂപയും 6000 രൂപയും മുതൽ മുടക്കി ഒരു വ്യാപാരം നടത്തുന്നു. ലാഭത്തിൻെറ 30% വ്യാപാരത്തിൻെറ ചുമതല വഹിക്കുന്നവകയ്ക്കു് A യ്ക്കു കൊടുക്കുകയും ബാക്കി ലാഭം മുടക്കിയ മുതലിൻെറ അനുപാതമനുസരിച്ചു് വീതിക്കയും ചെയ്താൽ ഓരോരുത്തൎക്കും എന്തു കിട്ടും.

10. പൂരിപ്പിച്ചെഴുതുക. 4 :—: :—: 9. (രണ്ടും ഒരേ സംഖ്യയായിരിക്കണം.

11. 33 പേർ 12 ദിവസംകൊണ്ടു് ഒരു ജോലിയുടെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗം ചെയ്തുതീൎക്കുന്നു. എത്രപേരെ കൂടുതലായി നിയമിച്ചാൽ 15 ദിവസം കൊണ്ടു് ബാക്കിജോലി ചെയ്തു തീൎക്കാം.

12. മണ്ണെണ്ണയ്ക്കു് ഗ്യാലനു് 1 രൂ. 2 ണ. വിലയുള്ളപ്പോൾ ദിവസം 6 മണിക്കൂർ വീതം 48 വിളക്കുകൾ കത്തിക്കാനായി ഒരു മുനിസിപ്പാലിററി 101 രൂ. 4 ണ. ചിലവാക്കുന്നു. എന്നാൽ മണ്ണെണ്ണയ്ക്കു് ഗ്യാലനു് 1 രൂ. 8 ണ. വിലയായാൽ ദിവസം 4 മണിക്കൂർ വീതം എത്ര വിളക്കുകൾ 120 രൂ. പ്രതിമാസച്ചിലവിൽ കത്തിക്കാൻ സാധിക്കും.

13. A, B എന്ന രണ്ടാളുകൾ ചേൎന്നു് യഥാക്രമം 3500 രൂപയും 2500 രൂപയും മുടക്കി ഒരു പങ്കുകച്ചവടം തുടങ്ങി. അഞ്ചുമാസം കഴിഞ്ഞു് A 1000 രൂപ പിൻവലിക്കുകയും B 1000 രൂപാ കൂടുതൽ മുടക്കുകയും ചെയ്തു. വൎഷാവസാനം 1800 രൂ. ആകെ ലാഭമുണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ ഓരോരുത്തൎക്കും എന്തു ലാഭം കിട്ടിയിരിക്കും.

14. 18 ഡിവിഷൻ ഉള്ള ഒരു സ്കൂളിൽ ഓരോ ഡിവിഷനിലും 50 കുട്ടികൾ വീതം ഉണ്ടു്. സ്കൂളിലെ ആകെ ഫീസ്‌വരവു് 3780 രൂപയാണു്. അഞ്ചുഡിവിഷൻ കൂടുതലുണ്ടാകയും ഓരോ ഡിവിഷനിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം 35 വീതം ആകയും ഫീസു് മുൻനിരക്കിൻെറ $\frac{1}{7}$ ഭാഗം കൂടെ കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ ആകെ ഫീസ് വരവു് എന്തായിരിക്കും.

15. Aയ്ക്കു് 2 രൂപ കിട്ടുമ്പോൾ Bയ്ക്കു 3 രൂപയും Bയ്ക്കു് 5 രൂപ കിട്ടുമ്പോൾ Cയ്ക്കു് 4 രൂപയും കിട്ടത്തക്കവണ്ണം 740 രൂപ A, B, C ഈ മൂന്നു പേൎക്കായി വീതിക്കുക.

16. A, B, C എന്ന മൂന്നുപേർ യഥാക്രമം 6000 രൂ. 3000 രൂ. 2000 രൂ. മുതൽ മുടക്കി ഒരു കൂട്ടുവ്യാപാരം തുടങ്ങുന്നു. ശമ്പളമായി ആദായത്തിൻെറ 15% Aയും 10% Bയും എടുത്തശേഷം ശിഷ്ടം മുത

ലിൻെറ അനുപാതസംഖ്യയിൽ വീതിക്കുന്നു. ആദായം 2420 രു. എങ്കിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും വീതമെന്തു്.

17. ഒരു ചതുർഭുജത്തിൻെറ കോണുകൾ 2 : 3 : 5 : 8 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാൽ കോണുകൾ കാണുക.

18. ആവശ്യമുള്ള മുതൽ മുഴുവനും A മുടക്കുക; പ്രവൎത്തനം മുതലായവ B നടത്തുക; ആകെ ലാഭത്തിൽ 20% B യ്ക്കും A യ്ക്കു് അയാൾ മുടക്കിയിട്ടുള്ള മുതലിനു 15% നിരക്കിൽ പലിശ കൊടുക്കുകയും ചെയ്തശേഷമുള്ള ലാഭം ഇരുവരും തുല്യമായി ഭാഗിച്ചെടുക്കുക; എന്ന കരാറിൽ A യും B യുംകൂടി ഒരു പങ്കുകച്ചവടം തുടങ്ങുന്നു. 6000 രൂപ ആകെ ലാഭമുള്ള ഒരു വൎഷത്തിൽ B യ്ക്കു് ആകെ കിട്ടിയതു് 2100 രൂപ ആയാൽ A മുടക്കിയ മുതലെന്തു്.

19. A യുടെയും B യുടെയും ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ 6 : 5 എന്നും B യുടെയും C യുടെയും ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ 3 : 4 എന്നും ഉള്ള അംശബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം 5300 രൂപയെ A, B, C എന്ന മൂന്നുപേൎക്കായി ഭാഗിക്കുക.

20. A, B, C എന്ന മൂന്നുപേർചേൎന്നു് യഥാക്രമം 5000, 8000, 12000 രൂപ മുതൽ മുടക്കി കച്ചവടം തുടങ്ങി. A യെ ഒരു നിശ്ചിത വാൎഷികശമ്പളത്തിൽ മാനേജരായി നിയമിച്ചു. വൎഷാവസാനത്തിൽ തന്നാണ്ടത്തെ ആദായത്തിൽനിന്നും A യുടെ ശമ്പളം കൊടുത്തിട്ടു് ശിഷ്ടമുള്ള തുകയെ ഓരോരുത്തർ മുടക്കിയിട്ടുള്ള മുതലിൻെറ അനുപാതസംഖ്യയിൽ വീതിച്ചെടുത്തപ്പോൾ ശമ്പളമുൾപ്പെടെ A യ്ക്കു് 1350 രൂപയും B യ്ക്കു് 1200 രൂപയും കിട്ടിയാൽ C യ്ക്കു് എന്തു കിട്ടും. A യ്ക്കു ശമ്പളമായി കൊടുത്ത തുകയെന്തു്.

21. ഒരു അനാഥമന്ദിരത്തിലെ 60 കുട്ടികൾക്കു 30 ദിവസത്തേക്കു വേണ്ട പാലിനു് ഇടങ്ങഴിക്കു് 1 രൂപാ വീതം 180 രൂപ ചിലവായാൽ മന്ദിരത്തിൽ 75 കുട്ടികൾ ഉള്ളപ്പോൾ ഇടങ്ങഴിക്കു് 1 രു. 4 ണ. വീതം 225 രൂപയ്ക്കു് എത്ര ദിവസത്തേക്കു വേണ്ട പാൽ വാങ്ങിക്കാം.

നിൎദ്ധനന്മാരുടെ കടം മുതലിനെക്കാൾ കൂടിയിരിക്കും. കൊടുത്തുതീൎക്കേണ്ട തുകകളുടെ അനുപാതമനുസരിച്ചു് മുതൽ വിതിച്ചു കൊടുക്കുന്നു. മുതൽ ÷ കടം = വീതാംശം.

അഭ്യാസം 4

1. ഒരു നിർദ്ധനൻെറ കടം 6500 പവനും മുതൽ 3900 പവനും ആണെങ്കിൽ പവൻ ഒന്നിനു് എന്തു വീതാംശം കൊടുക്കാം.

2. ഒരു നിർദ്ധനൻ രൂപയ്ക്കു 10 ണ. 8 പൈ. വീതം വീതാംശം കൊടുക്കുന്നു. ഒരാൾക്കു വീതാംശമായി ആകെ 600 രൂപ കിട്ടിയാൽ അയാൾക്കു നഷ്ടപ്പെട്ട തുകയെന്തു്.

3. ഒരു നിർദ്ധനൻ രൂപയ്ക്കു 11 ണ. 3 പൈ വീതം വീതാംശം കൊടുക്കുന്നു. ഒരാൾക്കു് അതുനിമിത്തം 296 രൂ. 14 ണ. നഷ്ടമുണ്ടായാൽ അയാൾക്കു് എത്ര രൂപാ കിട്ടാനുണ്ടായിരുന്നു.

4. ഒരു നിർദ്ധനൻ ആദ്യം രൂപയ്ക്കു് 6 ണ. 6 പൈയും ബാക്കി കടത്തിനു് രണ്ടാമതു് 5 ണ. 4 പൈയും വീതാംശം കൊടുക്കുന്നു. ഒരാൾക്കു രണ്ടാമതു കിട്ടിയ വീതാംശം 190 രൂപയാണെങ്കിൽ അയാൾക്കു് ആകെ എത്ര രൂപാ കിട്ടാനുണ്ടായിരുന്നു.

5. ഒരാളിൻെറ മുതലും കടവും തുല്യമാണു്. എന്നാൽ മുതലിൻെറ 20% ഈടാകുന്നില്ല. എന്നാൽ രൂപയ്ക്കു് എന്തു വീതാംശംവെച്ചു കൊടുക്കാം.

6. ഒരു നിർദ്ധനൻെറ ആസ്തി 21600 രൂപയായി വിലമതിക്കപ്പെടുന്നു. അതിൽ 8400 രൂപ മുഴുവനായും ബാക്കിയുള്ളതിൽ 75% വും പിരിഞ്ഞുകിട്ടി. ഇടപാടുകൾ തീർക്കാൻ 1100 രൂപ ചിലവായി. അയാളുടെ ആകെ ബാദ്ധ്യത 22360 രൂപയാണെങ്കിൽ ഉത്തമർണ്ണന്മാക്കു കിട്ടുന്ന വീതാംശമെന്തു്. (അണ, പൈയാക്കി എഴുതുക.)

7. ഒരു നിർദ്ധനൻെറ ബാദ്ധ്യതകൾ 27150 രൂപയും ആസ്തി 24000 രൂപയുമായിരുന്നു. എന്നാൽ ആസ്തിയിൽ 13000 രൂപയ്ക്കു് 13 ണ. ക്രമത്തിനെ പിരിഞ്ഞുകിട്ടിയുള്ളു. കൂടാതെ ആകെ കിട്ടേണ്ട തുകയുടെ 5% ചിലവാവുകയും ചെയ്തു. രൂപയ്ക്കു് എന്തു വീതം അയാളുടെ ഉത്തമർണ്ണർക്കു കൊടുക്കുവാൻ സാധിക്കും.

8. രൂപയ്ക്കു് 13 ണ. $2\frac{2}{5}$ പൈ എന്ന വീതാംശം എത്ര ശതമാനമെന്നു കാണുക.

9. ഒരു നിർദ്ധനന് 64000 രൂപയുടെ ബാദ്ധ്യതയുണ്ട്. അയാളുടെ ആസ്തി 36000 രൂപയുടെ പിരിഞ്ഞുകിട്ടേണ്ട കടങ്ങളും 16000 രൂ. വിലയുള്ള വസ്തുക്കളുമാണ്. ഇതിൽ ആദ്യത്തേതിൽനിന്ന് 80% വും രണ്ടാമത്തേതിൽ 5% കൂടുതലും ഈടാകുന്നു. ബാദ്ധ്യതയിൽ 5% ക്രമത്തിൽ ഒരു തുക ചിലവുകൾക്കായിട്ടു വിനിയോഗിച്ചാൽ ഉത്തമർണ്ണർക്ക് രൂപയ്ക്ക് എന്തുവീതം കൊടുത്തുതീർക്കാൻ സാധിക്കും.

പലിശ രണ്ടുതരമുണ്ട്; സാധാരണ പലിശയും കൂട്ടുപലിശയും. സാധാരണപലിശക്രമമായാൽ എല്ലാ വർഷത്തിലും പലിശ തുല്യമായിരിക്കും. കൂട്ടുപലിശയായാൽ ഓരോ ക്ലിപ്ത കാലഘട്ടം കഴിയുമ്പോഴും പലിശ മുതലിനോടു കൂട്ടിച്ചേർത്തു വരുന്ന ആകെത്തുകയ്ക്കാണ് അടുത്ത കാലഘട്ടത്തേക്കുള്ള പലിശ കണക്കാക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ടു പലിശ കൂടിക്കൂടി വരും.

സൂത്രവാക്യം: P = മുതൽ; $r\%$ = പലിശനിരക്ക്; n = കാലം; I = പലിശ; A = മുതലും പലിശയും.

സാധാരണപലിശ : $I = \frac{prn}{100}$

കൂട്ടുപലിശ : $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

അഭ്യാസം 5

1. വർഷംതോറും മുതലിൽ കൂട്ടി പ്രതിവർഷം $4\frac{1}{2}\%$ പലിശവെച്ച് 5000 രൂപയ്ക്കു 2 വർഷത്തേക്കുള്ള പലിശയും അർദ്ധവർഷംതോറും മുതലിൽ കൂട്ടി പ്രതിവർഷം 5% പലിശവെച്ച് 5000 രൂപയ്ക്കു 2 വർഷത്തേക്കുള്ള പലിശയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.

2. മൂന്നുകൊല്ലംമുമ്പ് പ്രതിവർഷം 5% കൂട്ടുപലിശയ്ക്കു വാങ്ങിയ ഒരു കടം വീട്ടാനായി ഒരു എസ്റ്റേറ്റ് 4630 രൂ. 8 ണ. യ്ക്കു വിററു. എന്നാൽ കടം വാങ്ങിയ തുക എന്ത്.

3. ഒരാൾ 2500 രൂപാ വില.കൊടുത്ത് ഒരു പുരയിടം വാങ്ങി. പ്ര. വ. 120 രൂ. പാട്ടത്തിനു കൊടുത്തു. പാട്ടം കിട്ടുന്ന തുക ഓരോ

വഷത്തിൻെറയും അവസാനത്തിൽ പ്ര. വ. 5% കൂട്ടപലിശയ്ക്കു് ഒരു ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. മൂന്നു വഷം കഴിഞ്ഞപ്പോഠം പുരയിടം 2750 രൂപയ്ക്കു വിററു. അപ്പോഠം മുതലും പലിശയുംകൂടി അയാളുടെ കൈവശമുള്ള ആകെ തുകയെന്തു്. 2500 രൂ. സാധാരണപലിശയ്ക്കു നിക്ഷേപിച്ചു് മൂന്നു വഷംകൊണ്ടു മുതലും പലിശയുംകൂടി ആ തുക കിട്ടണമെങ്കിൽ പലിശനിരക്കു് എന്തായിരിക്കണം.

4. ഒരു വസ്തുവിൽനിന്നു പ്രതിമാസം 80 രൂ. വാടക കിട്ടും. കരം മുതലായവകയ്ക്കു് ഒരു വഷം 360 രൂ. ചിലവുണ്ടു്. മിച്ചമുള്ള ആദായം കൊണ്ടു് പ്ര. വ. 6% പലിശനിരക്കു നടക്കണമെങ്കിൽ വസ്തുവിൻെറ വില എന്തു്.

5. 16000 രൂപയ്ക്കു പ്രതിവഷം $2\frac{1}{2}$% കൂട്ടപലിശവെച്ചു് മൂന്നുവഷം കൊണ്ടു് എന്തു പലിശയാകും.

6. പലിശയും മുതലുംകൂടി മൂന്നു തുല്യസംഖ്യകളായി ഓരോ വഷവും അവസാനത്തിൽ തിരിയെ കൊടുത്തുകൊള്ളാമെന്ന കരാറിൽ ഒരാഠം പ്ര. വ. $2\frac{1}{2}$% കൂട്ടപലിശയ്ക്കു് 3075 രൂ. 10 ണ. കടം വാങ്ങുന്നു. എന്നാൽ ഓരോ വഷവും കൊടുത്തുതീക്കേണ്ട തുകയെന്തു്.

$$\left[3075\tfrac{10}{16} \div \left(\frac{100}{102\frac{1}{2}} + \frac{100}{102\frac{1}{2}} \times \frac{100}{102\frac{1}{2}} + \frac{100}{102\frac{1}{2}} \times \frac{100}{102\frac{1}{2}} \times \frac{100}{102\frac{1}{2}}\right)\right]$$

7. ഒരാഠം പ്ര. വ. $6\frac{1}{4}$% പലിശയ്ക്കു 3600 രൂ. കടം വാങ്ങുന്നു. ഒരു വഷം കഴിഞ്ഞു് 1800 രൂപയും പിന്നീടു് ഒരു വഷംകൂടി കഴിഞ്ഞു് 1200 രൂപയും തിരിയെ കൊടുക്കുന്നു. എന്നാൽ മൂന്നാം വഷാവസാനത്തിൽ ബാക്കി എന്തു കൊടുക്കണം.

8. ഞാൻ എൻെറ പുത്രിയുടെ പേരിൽ 1946 ആഗസ്റ്റ് 1–ാനു- 100 രൂപയും പിന്നീടു് മാസംതോറം 1–ാനു- 25 രൂപയും ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചു. പ്ര. വ. 3% പലിശ കണക്കാക്കിയാൽ 1947 ജനു. 1–ാനു- പുത്രിയുടെ പേരിലുള്ള ആകെ തുകയെന്തു്.

9. അദ്ധവഷംതോറം മുതലിൽ കൂട്ടത്തക്കവണ്ണം പ്ര. വ. 8% കൂട്ടപലിശവെച്ചു് ഒരാഠം ജനു. 1–ാനു- 1500 രൂ. കടം വാങ്ങിയാൽ ആ വഷാവസാനം കടത്തിൻെറ ആകെത്തുകയെന്തു്. ഡിസം. 31–ാനു- അയാളുടെ പക്കൽ 1400 രൂ. രൊക്കംപണമായും 3 മാസം കാലാവധി വെച്ചു് നവം. 16–ാനു- എഴുതിയ 584 രൂപയുടെ ഒരു ബില്ലും ഉണ്ടു്.

ബിൽ അന്നേദിവസം 5% നിരക്കിൽ ഡിസ്കൌണ്ടചെയ്തു് പണം വാങ്ങി കടം വീട്ടിയാൽ അയാളുടെ കൈവശം ബാക്കി എന്തു തുകയുണ്ടു്.

10. അർദ്ധവർഷംതോറം മുതലിൽ കൂട്ടത്തക്കവണ്ണം പ്ര. വ. 4% കൂട്ടുപലിശയ്ക്കു് ഒരാൾ 10000 രൂ. ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. 18 മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ബാങ്കു പൊളിയുകയും രൂപയ്ക്കു് 6 ണ. വീതം കൊടുത്തു കടം തീർക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ നിക്ഷേപകനു് എന്തു തുക കിട്ടും. (അണവരെ ചുരുക്കി എഴുതുക.)

11. മൂന്നുകൊല്ലം മുമ്പു് 8000 രൂപയ്ക്കു വാങ്ങിയ ഒരു കാറിന്റെ വില ഓരോ വർഷം കഴിയുമ്പോൾ ആ വർഷത്തിന്റെ ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന വിലയുടെ 10% കുറയുന്നു. എന്നാൽ ഇപ്പോഴത്തെ വിലയെന്തു്.

12. ഞാൻ 50000 രൂ. ചിലവാക്കി ഒരു വസ്തു വാങ്ങി അതിൽ ഒരു കെട്ടിടം പണിയുന്നു. അററകുററപ്പണികൾക്കു പ്രതിവർഷം 300 രൂ. ചിലവുള്ളതു നീക്കി പ്ര. വ. 6% ആദായം കിട്ടണമെങ്കിൽ അതു മാസം തോറം എന്തു വാടകയ്ക്കു കൊടുക്കണം.

13. ഒരു ടൗണിൽ രണ്ടു ബാങ്കുകളുണ്ടു്. മൂന്നു വർഷത്തെ കാലാവധിയുള്ള നിക്ഷേപങ്ങൾക്കു് ആദ്യത്തെ ബാങ്കിൽ 4% ക്രമത്തിനും മറേറതിൽ ആദ്യത്തെ വർഷം 3%,രണ്ടാമത്തേതിൽ 4%, മൂന്നാമത്തേതിൽ 5% എന്ന തോതിലും കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്നു. എങ്കിൽ 3750 രൂ. മൂന്ന വർഷത്തേക്കു നിക്ഷേപിക്കുന്ന ഒരാളിനു് ഏതു ബാങ്കിൽനിന്നും കൂടുതൽ തുക (പലിശയും മുതലുംകൂടി) കിട്ടും. എത്ര.

14. ആണ്ടേയ്ക്കു് 6% ക്രമത്തിനു് കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന ഒരു ബാങ്കിൽനിന്നും ഒരാൾ 4000 രൂ. കടമെടുക്കയും ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 1500 രൂപയും രണ്ടാമത്തെ വർഷാവസാനത്തിൽ 1500 രൂപയും തിരിച്ചടയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ മൂന്നാമത്തെ വർഷാവസാനത്തിൽ എന്തു തുക അടച്ചാൽ കടം മുഴുവനും തീരും.

ബിൽ എന്നു പറയുന്നതു് ഒരുമാതിരി കടപ്പത്രമാണു്. അതിൽ പറയുന്ന തുക ഒരു കാലാവധി കഴിഞ്ഞു കിട്ടുമെന്നാണു് അതിന്റെ ചുരുക്കം. ആ തുകയാണു മുഖവില. കാലാവധിക്കു മുൻപു പണം വാങ്ങുകയാണെങ്കിൽ അത്രയും കാലത്തേക്കുള്ള ഡിസ്കൗണ്ടു് അല്ലെങ്കിൽ വട്ടം കുറച്ചേ കിട്ടുകയുള്ളൂ. കാലാവധി മാസക്കണ

ക്കിലും ഡിസ്കൗണ്ടു നിരക്കു് പ്രതിവർഷം ശതമാനക്കണക്കിലും ഡിസ്കൗണ്ടു കുറയ്ക്കേണ്ട കാലം ദിവസക്കണക്കിലും കുറിച്ചുവരുന്നു.

അഭ്യാസം 6

1. 7 മാസത്തെ കാലാവധിവെച്ചു് മാർച്ചുമാസം 12-ാനു- എഴുതിയ 1576 പ. 16 ഷി. ന്റെ ഒരു ബിൽ ജൂൺ 27-ാനു- പ്ര. വ. $6\frac{1}{4}\%$ ഡിസ്കൌണ്ടുവെച്ചു കൈമാറിയാൽ എന്തു തുക കിട്ടും.

2. രണ്ടുമാസം കാലാവധിവെച്ചു് 1942 ഏപ്രിൽ 1-ാനു- എഴുതിയ 500 രൂപയുടെ ഒരു ബിൽ ഹെൻട്രി സമ്മതിച്ചു് ഒപ്പിട്ടു് സ്മിത്തിനു കൊടുക്കുന്നു. അതു് 1942 ഏപ്രിൽ 5-ാനു- ഇംപീരിയൽ ബാങ്കിൽ പ്ര. വ. 5% ഡിസ്കൌണ്ടുവെച്ചു് കൈമാറുന്നു. എന്നാൽ താഴെപ്പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്കു് ഉത്തരം എഴുതുക.

(a) ബിൽ വാങ്ങിയതു് ആരു്. (b) ബിൽ കൈമാറിക്കിട്ടിയതുക ആരു വാങ്ങി. (c) കാലാവധി പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ പണം കൊടുക്കേണ്ടതു് ആരു്. (d) അയാൾ എന്തു തുക കൊടുക്കണം. (e) കാലാവധി പൂർത്തിയാകുന്ന തീയതി ഏതു്. (f) ബിൽ കൈമാറി കിട്ടിയ തുകയെന്തു്.

3. മൂന്നു മാസത്തെ കാലാവധിവെച്ചു് 6-9-1946-ൽ എഴുതിയ 1400 രൂപയുടെ ഒരു ബിൽ 27-9-1946-ൽ പ്ര. വ. 5% ഡിസ്കൌണ്ടുവെച്ചു കൈമാറിയാൽ എന്തു തുക കിട്ടും.

4. അഞ്ചുമാസത്തെ കാലാവധിവെച്ചു് 1949 സെപ്. 20-ാനു- എഴുതിയ 3102 രൂ. 8 ണ. യുടെ ഒരു ബിൽ 1949 ഒക്ടോബർ 31-ാനു- ഒരു ബാങ്കർ ആണ്ടേയ്ക്കു് 5 ശതമാനക്രമത്തിൽ ഡിസ്കൌണ്ടു ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ അയാൾ എന്തു തുക രൊക്കം കൊടുക്കും.

5. കൈമാററച്ചീട്ടു്.

രൂ. 625. മൂന്നുമാസം കഴിയു എന്റെ ആർഡർക്കോ ഞ്ചുരൂപാ സാമാനം വാ യി തരേണ്ടതാണു്. ശ്രീ. കൃഷ്ണമൂർത്തി തിരുനൽവേലി	സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. റിസർവ്വ് ബാങ്ക് ആഫ് ഇൻഡ്യായിൽ നിന്നു പണം വാങ്ങേണം. കൃഷ്ണമൂർത്തി (ഒപ്പു്)	എറണാകുളം മാർച്ചു് 2, 1950 മ്പോൾ എനിയ്ക്കോ അറുനൂററി ഇരുപത്ത ങ്ങിയതിന്റെ വിലയാ വെങ്കിടാചലം (ഒപ്പു്)

ഈ ചീട്ടു് 1950 മാർച്ചു് 24-ാനു- 5% നിരക്കിനു മാറി. ബാങ്കിൽനിന്നു കൊടുത്ത തുക എന്തു്

6. ബാങ്കരുടെ വട്ടം (Bank Discount) എന്നാൽ എന്തു്. 1569 രൂ. 8 ണ. യ്ക്കു് മാർച്ചു് മാസം 12-ാനു- 7 മാസത്തെ കാലാവധിക്കു് എഴുതിയ ഒരു കൈമാററച്ചീട്ടു് അതേവഷം ജൂൺ 22-ാനു- 5% പ്രകാരം ഒരു ബാങ്കിൽ മാറുകയായിരുന്നാൽ ബാങ്കർക്കുള്ള വട്ടം എന്തു്.

7. 1951 ആഗസ്റ്റ് 20-ാനു- 4 മാസത്തെ കാലാവധിക്കെഴുതിയ 2737 രൂ. 8 ണ. യുടെ ഒരു കൈമാററച്ചീട്ടിനെ 1951 അക്ടോബർ 9-ാനു- 5% വട്ടനിരക്കിൽ ഒരു ബാങ്കിൽ മാറിയാൽ എന്തു തുക രൊക്കം കിട്ടും.

സമയവും ജോലിയും സംബന്ധിച്ചുള്ള കണക്കുകളിൽ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യേണ്ടതു് ജോലിയാണു്; സമയമല്ല. ഒരാം ക്കു് ഒരു ജോലി 10 ദിവസംകൊണ്ടും മററൊരാംക്കു് അതേ ജോലി 15 ദിവസംകൊണ്ടും ചെയ്തുതീക്കാമെങ്കിൽ രണ്ടുപേക്കും കൂടി എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു് അതു ചെയ്തുതീക്കാം. ഒരു ദിവസം ഓരോരുത്തക്കും ചെയ്യാവുന്ന ജോലി ഒന്നിച്ചുകൂട്ടിയാൽ രണ്ടുപേക്കും കൂടി ഒരു ദിവസം ചെയ്യാവുന്ന ജോലി എത്രയെന്നു കിട്ടും. $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$. ഒരു ദിവസം $\frac{1}{6}$ ജോലി ചെയ്യാമെങ്കിൽ 6 ദിവസം കൊണ്ടു് മുഴുവൻ ജോലി ചെയ്യാം.

അഭ്യാസം 7

1. ഒരാംക്കു് m ദിവസംകൊണ്ടു് ഒരു ജോലി ചെയ്തുതീക്കാം. ഒരു കുട്ടിക്കു് അതിനു് 5 ദിവസം കൂടുതൽ വേണം. രണ്ടുപേരുംകൂടിയാണെങ്കിൽ n ദിവസം മതിയാകും. m, n ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഒരു സമവാക്യമായി എഴുതുക.

2. 8500 ഗ്യാലൻ കൊള്ളുന്ന ഒരു ഒഴിഞ്ഞ ടാങ്കിനോടു് മിനിട്ടിൽ 10, 15, 24 ഗ്യാലൻ വീതം യഥാക്രമം നിറയ്ക്കുന്ന മൂന്നു പമ്പുകറം ഘടിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ടു്. ആദ്യത്തെ പമ്പു് ഒരു മണിക്കൂർ പ്രവത്തിച്ചശേഷം രണ്ടാമത്തേതു തുറന്നു് രണ്ടുംകൂടി രണ്ടു മണിക്കൂർ പ്രവത്തിച്ചതിൽപിന്നെ

മൂന്നാമത്തേതുംകൂടി തുറന്നാൽ പിന്നീട്ട് എന്തു സമയംകൊണ്ടു് ടാങ്ക് നിറയും.

3. ഒരു ജോലി A യും B യും കൂടി 12 ദിവസംകൊണ്ടും B യും C യും കൂടി $5\frac{1}{7}$ ദിവസംകൊണ്ടും C യും A യും കൂടി $4\frac{1}{2}$ ദിവസംകൊണ്ടും ചെയ്തുതീക്കും. അവർ മൂന്നുപേരുംകൂടി അതു് എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്യും.

മൂന്നുപേരുംകൂടി ജോലി ചെയ്തു തീത്തു് 72 രൂപാ കൂലി വാങ്ങിയാൽ ഓരോരുത്തക്കും ജോലിക്രമമനുസരിച്ചു് എന്തു കൂലി കിട്ടണം.

സമയവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമാണു ഗതിവേഗം. വാഹനങ്ങൾ ഓരോ ക്ലിപ്തസ്ഥാനം കടന്നുപോകുന്നതിനു വേണ്ടിവരുന്ന സമയം ഗതിവേഗത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും. ഓടിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന രണ്ടു വാഹനങ്ങളുമാകാം. പരസ്പരം കടന്നുപോകുന്ന വാഹനങ്ങളോ സ്ഥാനങ്ങളോ A, B എന്ന സംജ്ഞകൊണ്ടു കുറിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിനുവേണ്ട സമയം കണക്കാക്കുന്ന വിധം താഴെക്കാണുംപ്രകാരമാണു്.

A യുടെ നീളം $= l$; B യുടെ നീളം $= m$

A യുടെ വേഗം $= u$; B യുടെ വേഗം $= v$

പരസ്പരം കടന്നുപോകുന്നതിനുള്ള സമയം $= t$

രണ്ടും പരസ്പരം എതിരേ വരുകയാണെങ്കിൽ $t = \frac{l+m}{u+v}$

രണ്ടും ഒരേ നേർക്കു പോവുകയാണെങ്കിൽ $t = \frac{l+m}{u-v}$

B ഒരു തൂണാണെങ്കിൽ $m = 0$, $v = 0$,

B ഒരാളാണെങ്കിൽ $m = 0$,

B ഒരു പാലമാണെങ്കിൽ $v = 0$.

ചില ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരം സമവാക്യം രൂപീകരിച്ചു കാണേണ്ടതാണു്.

അഭ്യാസം 8

1. 400 അടി നീളമുള്ള ഒരു ട്രെയിൻ 392 അടി നീളമുള്ള ഒരു പ്ലാററ്ഫാറം കടന്നുപോകുന്നതിനു് 18 സെക്കൻഡ് സമയം എടുക്കുന്നു. എന്നാൽ ട്രെയിൻ മണിക്കൂർതോറും എത്ര മൈൽ വേഗത്തിൽ ഓടുന്നു.

2. ഒരു സാധാരണ ട്രെയിൻ തിരുവനന്തപുരത്തുനിന്നു് 10-14 a. m.-നു പുറപ്പെട്ടു് 9-8 p. m.-നു വിരുദുനഗറിൽ എത്തുന്നു. ഒരു എക്സ്പ്രസ് ട്രെയിൻ 9-14 a. m.-നു വിരുദുനഗറിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു് 6-50 p. m.-നു തിരുവനന്തപുരത്തെത്തുന്നു. രണ്ടു സ്ഥലവും തമ്മിലുള്ള ദൂരം 180 മൈൽ ആണെങ്കിൽ അവ എപ്പോൾ പരസ്പരം കടന്നു പോകും.

3. ഒരു ട്രെയിൻ A യിൽനിന്നു് 8-5 a. m.-നു തിരിച്ചു് അടുത്ത ദിവസം 7-15 a.m.-നു Bയിൽ എത്തുന്നു. വഴിമദ്ധ്യേ ഓരോ സ്റ്റേഷനിൽ നിന്നതിനുവേണ്ടി ആകെ 2 മ. 25 മി. സമയമെടുത്തു. A ൽനിന്നു B ലേ ക്കുള്ള ദൂരം 498 മൈലായാൽ ട്രെയിൻ മണിക്കൂറിൽ ശരാശരി എത്ര മൈൽ വേഗത്തിൽ ഓടി.

4. ഒരാൾ മണിക്കൂറിൽ $3\frac{1}{2}$ മൈൽ വീതം വേഗത്തിൽ നടന്നു പോകുന്നു. അയാൾക്കെതിരെ ഓടിക്കൊണ്ടു വരുന്ന ഒരു ട്രെയിൻ $7\frac{1}{2}$ സെക്കൻഡുകൊണ്ടു് അയാളെ കടന്നുപോകുന്നു. ട്രെയിനിൻെറ നീളം 66 ഗജമാണെങ്കിൽ അതിൻെറ വേഗമെന്തു്.

5. ഒരാൾ 10 a. m. നു് A ൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു് മണിക്കൂറിൽ $3\frac{1}{2}$ മൈൽ വീതം വേഗത്തിൽ നടന്നു് B ൽ എത്തുന്നു. അവിടെ ഒരു മണി ക്കൂർ വിശ്രമിച്ചശേഷം മണിക്കൂറിൽ $7\frac{1}{2}$ മൈൽ വേഗത്തിൽ തിരിയെ സൈക്കിളിൽ മടങ്ങുന്നു. A ൽ 1-56 p. m.-നു് എത്തിയാൽ A ൽ നിന്നു B ലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

6. മണിക്കൂറിൽ 30 മൈൽ വേഗത്തിൽ ഓടുന്ന ഒരു ട്രെയിനിനും 100 ഗജം നീളമുണ്ടു്. എന്നാൽ അതു് 76 ഗജം നീളമുള്ള ഒരു പാലം് കടന്നുപോകുന്നതിനു് എന്തു സമയം വേണം.

7. ഒരു കാർ 20 മൈൽ ദൂരം മണിക്കൂറൊന്നിനു് 18 മൈൽ വേഗ ത്തിലും അടുത്ത 25 മൈൽ മണിക്കൂറൊന്നിനു് 15 മൈൽ വേഗത്തിലും സഞ്ചരിച്ചു. ആ യാത്രയിൽ കാറിൻെറ ശരാശരി വേഗം എന്തായിരുന്നു.

8. ഒരു തീവണ്ടി 8 സെക്കൻഡുകൊണ്ടു് ഒരു കമ്പിത്തൂണും 20 സെക്കൻഡുകൊണ്ടു് ഒരു പാലവും കടക്കുന്നു. പാലത്തിന്റെ നീളം 264 അടിയാണെങ്കിൽ തീവണ്ടിയുടെ നീളവും വേഗതയും കാണുക.

9. ഒരു മോട്ടോർബോട്ടു് 20 മൈൽ ഒഴുക്കു കയറിയശേഷം പുറപ്പെട്ട സ്ഥാനത്തു തിരിയെ എത്തുന്നു. ഒഴുക്കിന്റെ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 4 മൈലും ഒഴുക്കില്ലാത്ത സ്ഥലത്തു ബോട്ടിന്റെ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 12 മൈലും ആയാൽ ഈ യാത്രയിൽ ബോട്ടിന്റെ ശരാശരി വേഗതയെന്തു്.

10. ഒരു മോട്ടോർകാർ ഏതാനും ദൂരം മണിക്കൂറൊന്നിനു 30 മൈൽ വേഗത്തിലും തിരിയെ അത്രയും ദൂരം മണിക്കൂറൊന്നിനു് 20 മൈൽ വേഗത്തിലും ഓടിയാൽ രണ്ടു യാത്രകളിലുമായി അതിന്റെ ശരാശരി വേഗം എന്തു്.

11. 110 അടി നീളമുള്ളതും മണിക്കൂറിൽ 30 മൈൽ വേഗത്തിൽ ഓടുന്നതുമായ ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ 18 മൈൽ വേഗത്തിൽ അതേ ദിക്കിലേക്കു് ഓടുന്ന വേറൊരു തീവണ്ടിയെ സമീപിച്ചു് 25 സെക്കൻഡുകൊണ്ടു് അതിനെ കടന്നുപോകുന്നു. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ തീവണ്ടിയുടെ നീളമെന്തു്.

വർഗ്ഗമൂലം സംബന്ധിച്ചു് ഒരു പ്രധാനതത്വമുണ്ടു്.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$. വർഗ്ഗമൂലക്രിയ സാധാരണയായി ക്ഷേത്രമാനത്തിലാണു് ആവശ്യമായി വരാറുള്ളതു്. നീളം, വിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം ഇവയാണു വസ്തുക്കളുടെ അളവുകൾ. നീളത്തിനുള്ള തോതിൽനിന്നാണു് വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെയും വ്യാപ്തത്തിന്റെയും തോതുകൾ നിർണ്ണയിച്ചിരിക്കുന്നതു്. ക്ഷേത്രങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങൾ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഒരു ചതുരക്ഷേത്രത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കിട്ടും. പരസ്പരം ചതുരമായ രണ്ടു നീളം തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നതു് വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ അളവാണു്. വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള നിയമങ്ങൾ സൂത്രവാക്യങ്ങളായി താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

<u>ചതുരക്ഷേത്രം.</u> A = വിസ്തീർണ്ണം; l = നീളം;
b = വീതി; p = ചുററളവു്.

$$A = l\,b \quad ; \quad l = \frac{A}{b} \quad ; \quad b = \frac{A}{l}.$$

$$p = 2\,(l + b)\,; \quad l = \frac{p}{2} - b \quad ; \quad b = \frac{p}{2} - l.$$

<u>സമചതുരം.</u> A = വിസ്തീർണ്ണം; l = നീളം;

$A = l^2$; $l = \sqrt{A}$.

<u>സമാന്തരചതുർഭുജം.</u> A = വിസ്തീർണ്ണം; b = പാദം; h = ഉയരം

$$A = b\,h\,; \quad b = \frac{A}{h}\,; \quad h = \frac{A}{b}.$$

<u>ട്രപ്പീസിയം.</u> A = വിസ്തീർണ്ണം; a, b = സമാന്തരഭുജങ്ങൾ;
h = ഉയരം.

$$A = \tfrac{1}{2}\,(a + b)\,h\,; \quad h = \frac{2\,A}{a + b}; \quad a = \frac{2\,A}{h} - b\,;$$

$$b = \frac{2\,A}{h} - a.$$

<u>ത്രികോൺ.</u> A = വിസ്തീർണ്ണം; b = പാദം; h = ഉയരം.

$$A = \tfrac{1}{2}\,b\,h\,; \quad b = \frac{2\,A}{h}\,; \quad h = \frac{2\,A}{b}.$$

a, b, c = മൂന്നു വശങ്ങൾ; s = ചുററളവിന്റെ പകുതി.

$S = \frac{1}{2}\,(a + b + c)$; $A = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$.

<u>വൃത്തം.</u> A = വിസ്തീർണ്ണം; d = വ്യാസം; r = വ്യാസാർദ്ധം;
c = പരിധി.

$$c = \pi\,d = 2\,\pi\,r; \quad d = \frac{c}{\pi}; \quad r = \frac{c}{2\,\pi}.$$

$$A = \pi r^2; \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

π എന്നതു് ഏകദേശം 3·1416 ആകുന്നു. ഇത്രയെന്നു ക്ലിപ്തപ്പെടുത്താത്തപ്പോൾ $3\frac{1}{7}$ എന്നു വിചാരിക്കണം.

<u>സമഭുജത്രികോൺ.</u> A = വിസ്തീർണ്ണം; a = ഒരു ഭുജം; h = ഉയരം.

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad ; \quad a = \frac{2h}{\sqrt{3}} \quad ; \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

---

100 ലിങ്ക്സ് = 1 ചെയിൻ = 22 ഗജം

100 സെൻറ് = 1 ഏക്കർ = 4840 ച. ഗ. = 10 ച. ചെ.

$6\frac{1}{4}$ ഗ്യാലൻ = 1 ക്യൂബിക്കടി.

ചതുരക്കോണുകളോടുകൂടിയ ഒരു പദാൎത്ഥത്തിൻെറ നീളം, വീതി, പൊക്കം ഇവ മൂന്നുംകൂടി ഗുണിച്ചാൽ അതിൻെറ വ്യാപ്തം കിട്ടും. ഒന്നിനൊന്നു ചതുരമായ മൂന്നു് അളവുകൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്നതു് വ്യാപ്തത്തിൻെറ അളവാണു്. അതുകൊണ്ടു് വിസ്തീർണ്ണത്തെ ഒരളവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നതും വ്യാപ്തത്തിൻെറ അളവുതന്നെയാണു്.

അഭ്യാസം 9

1. രണ്ടു സമചതുരങ്ങളുടെ ചുററളവു് 16 ഇഞ്ചും 12 ഇഞ്ചും ആകുന്നു. ഇവ രണ്ടും കൂടിയിടത്തോളം വിസ്തീർണ്ണമുള്ള മറെറാരു സമചതുരത്തിൻെറ നീളമെന്തു്.

2. 21 അടി 1 ഇഞ്ചു നീളവും 16 അടി 6 ഇഞ്ചു വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയിൽ മുഴുവനും നിരത്തുന്നതിന്നു് ഉപയോഗിക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ സമചതുരമായ തറയോടിൻെറ നീളമെന്തു്.

3. ABCD എന്ന ഒരു ട്രപ്പീസിയത്തിൽ AD യും BC യും സമാന്തരമാണു്. $\angle A = \angle D = 60°$; AB = 2·5″ BC = 3″; CD = 2·5″. എന്നാൽ AD യുടെ നീളമെന്തു്.

4. ഒരു കിലോമീററിനു് ഒരു ഡെസിമീറർ എന്ന തോതുവെച്ചു നിൎമ്മിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു പ്ലാനിൽ 6·4 സെ. മീ. നീളവും 5 സെ. മീ. വീതിയുമുള്ള ഒരു നിലത്തിൻെറ ശരിയായ വിസ്തീൎണ്ണം എത്ര ഏക്കർ. (കി. മീ. = 5 ഫർലാംഗ്.)

5. $\sqrt{54 \cdot 9081} = 7 \cdot 41$; എന്നാൽ $\sqrt{549081}$, $\sqrt{\cdot 549081}$ ഇവ ഓരോന്നും എത്ര.

6. $\sqrt{16 \cdot 9} \times \sqrt{25 \cdot 6}$ എത്ര.

7. 8 അ. വീതിയുള്ള ഒരു വരാന്തയുടെ ഒരു വശത്തു് 35 അ. നീളവും 21 അ. പൊക്കവുമുള്ള ഒരു ചുവരുണ്ടു്. വരാന്തയ്ക്കു മുകളിലുള്ള മേൽക്കൂരയുടെ ഏററവും കുറഞ്ഞ പൊക്കം 6 അടിയായാൽ ആ മേൽക്കൂരയുടെ വിസ്തീൎണ്ണമെന്തു്.

8. $2\frac{3}{4}$ ഏക്കർ വിസ്തീൎണ്ണമുള്ള ത്രികോണാകൃതിയായ ഒരു സ്ഥലത്തിൻെറ ഒരു വശത്തിനു് $16\frac{1}{2}$ ചെയിൻ നീളമുണ്ടു്. എതിരെയുള്ള മൂലയിൽനിന്നു് ആ വശത്തേക്കു ചതുരമായി വരുന്ന രേഖയിൽക്കൂടി ഒരു വേലി കെട്ടുന്നെങ്കിൽ വേലിയുടെ നീളമെന്തു്. വേലി ആ വശത്തെ 1 : 2 എന്ന അനുപാതത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നെങ്കിൽ വേലിയുടെ ഓരോ വശത്തുമുള്ള സ്ഥലത്തിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണം കാണുക.

9. 17 അ. 3 ഇ. നീളവും 7 അ. 8 ഇ. വീതിയുമുള്ള ഒരു ദീൎഘചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണം ഒരു സമചതുരത്തിനു തുല്യമാണെങ്കിൽ സമചതുരത്തിൻെറ നീളമെന്തു്.

10. a'' നീളം, b'' വീതി, c'' പൊക്കം; അകവശത്തു് ഈ അളവുകളോടുകൂടി മൂടിയുള്ള ഒരു പെട്ടിയുണ്ടു്. പലകയുടെ വണ്ണം t'' ആകുന്നു. എന്നാൽ ആകവശത്തെ ആകെ വിസ്തീൎണ്ണവും തടിയുടെ വ്യാപ്തവും കാണുക.

11. ഒരു മീററർ = 39·37 ഇഞ്ചു്. എന്നാൽ 352 കി. മീ. എത്ര മൈൽ.

12. 16″ നീളവും 11″ വീതിയുമുള്ള ഒരു കടലാസിൽനിന്നു് $\frac{3}{4}''$ സമചതുരത്തിൽ എത്ര തുണ്ടു മുറിച്ചെടുക്കാം.

13. ഒരാൾ ഏക്കർ ഒന്നിനു് 1504 രു. വീതം വിലവെച്ചു് 10 ഏക്കർ വിസ്തീൎണ്ണമുള്ള സമചതുരമായ ഒരു സ്ഥലം വാങ്ങി നാലു

ചുററും ഗജം ഒന്നിന്നു 2 ണ. വീതം ചിലവുചെയ്തു വേലി കെട്ടുന്നു. ആകെ മുടക്കിയ മുതലിൽ $6\frac{2}{3}\%$ ആദായം കിട്ടണമെങ്കിൽ ഏക്കർ ഒന്നിന്നു എന്തു പാട്ടം കിട്ടണം.

14. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറയും ഒരു വൃത്തത്തിൻെറയും ചുററളവു 44 ഇഞ്ചു വീതമാണു. ഓരോന്നിൻെറയും വിസ്തീൎണ്ണമെന്തു.

15. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ കൎണ്ണം 3 ഇഞ്ചാണെങ്കിൽ അതിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണമെന്തു.

16. ഒരു പ്ലാനിൽ 10 ഏക്കർ വിസ്തീൎണ്ണത്തിന്നു 1 സെ. മീ. ചതുരമാണു തോതു. എന്നാൽ ഒരു മൈലിന്നു എത്ര സെ. മീ.

17. ഒരു മൈൽ പരിധിയുള്ള വൃത്താകാരമായ ഒരു തടാകത്തിൻെറ വ്യാസാൎദ്ധവും ക്ഷേത്രഫലവും കാണുക.

ഈ തടാകത്തിനു ചുററും 14 ഗജം വീതിയിൽ ഒരു റോഡുണ്ടെങ്കിൽ അതിൻെറ പുറവശത്തെ പരിധി മൈലായിട്ടും ക്ഷേത്രഫലം ഏക്കർ, സെൻറായിട്ടും കാണുക.

18. ലഘൂവാക്കുക. $\sqrt{67{\cdot}3^2 - 55{\cdot}2^2}$

19. 35 അടി വീതം വീതിയുള്ള രണ്ടു റോഡുകൾ 60° കോണിൽ സന്ധിക്കുന്നു. അവയ്ക്കു പൊതുവിലുള്ള സ്ഥലത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം ചതുരശ്രഅടിക്കു ശരിയായി കാണുക.

20. x ഗജം വ്യാസമുള്ള വൃത്താകാരമായ ഒരു പുൽത്തകിടിക്കു ചുററും തൊട്ടു വെളിയിലായി y ഗജം വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ടു. പാതയുടെ ക്ഷേത്രഫലം $\pi\, y(x + y)$ ച. ഗ. ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

21. 35574-നെ ഏററവും ചെറിയ ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഫലം ഒരു പൂൎണ്ണസംഖ്യയുടെ വൎഗ്ഗമാകും.

22. $\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ ആയാൽ $\sqrt{48}$ ൻെറ വിലയെന്തു.

23. 80 അടിയും 6 അടിയും കൎണ്ണങ്ങളുള്ള ഒരു സമചതുൎഭുജത്തിൻെറ (Rhombus) വിസ്തീൎണ്ണവും വശത്തിൻെറ നീളവും നിൎണ്ണയിക്കുക.

24. സമലംബാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വയലിൻെറ സമാന്തര വശങ്ങളുടെ നീളം 250 ഗജവും 350 ഗജവും അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 165

ഗജവുമാകുന്നു. ഒരു സെൻറിന്ന് 1 ണ. 3 പൈ പ്രകാരം ആ വയലിൻെറ ഭൂനികുതി എന്തു്

25. $315 \times 1155\ x$. ഒരു പൂൎണ്ണവൎഗ്ഗമായാൽ x ൻെറ വില യെന്തു്.

26. 7 ഇ. ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിക്കു തുല്യമായി ചുററളവുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണമെന്തു്.

27. $22\frac{1}{2}$ ഏക്കർ വിസ്തീൎണ്ണമുള്ളതും സമചതുരാകൃതിയിലുള്ളതുമായ ഒരു വയൽ 9980 രൂപ വിലയ്ക്കു വാങ്ങി അതിനു ചുററും ഗജമൊന്നിന്നു് 2 രൂ. 10 ണ. 8 പൈ നിരക്കിൽ ഒരു വേലിയും കെട്ടുന്നു. മുടക്കമുതലിന്നു് $7\frac{1}{2}\%$ നിരക്കിൽ ആദായം ലഭിക്കുന്നതിന്നു് വയൽ ഏക്കർ ഒന്നിന്നു് എന്തു പാട്ടത്തിന്നു് കൊടുക്കണം.

28. $\sqrt{3}=1{\cdot}732$, $\sqrt{5}=2{\cdot}236$. എന്നാൽ $\sqrt{60}$ എത്രയെന്നു് രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു ശരിയായി കാണുക.

29. ആരങ്ങൾ തമ്മിൽ 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ പരിധികൾ തമ്മിലും ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തമ്മിലും ഉള്ള അംശബന്ധങ്ങളെന്തു്.

30. വൃത്താകാരമായ ഒരു കുളത്തിൻെറ പരിധി 4 ഫർലാങ്ങ് ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ആരവും ക്ഷേത്രഫലവും കാണുക. (ഏക്കർ, സെൻറായി)

മേല്പറഞ്ഞ കുളത്തിൻെറ തുല്യവിസ്തീൎണ്ണത്തിൽ, സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കുളത്തിൻെറ വശത്തിന്നു് എന്തു നീളം ഉണ്ടായിരിക്കും.

അദ്ധ്യായം II

വിസ്തീൎണ്ണവും വ്യാപ്തവും

ചതുരാകൃതിയിലല്ലാത്തതും എന്നാൽ ചില ക്ലിപ്തരൂപമുള്ളതുമായ വസ്തുക്കളുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുന്ന രീതിയാണു് ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ വിവരിക്കുന്നതു്.

സ്തംഭം. ഒരേവൎണ്ണത്തിൽ നീണ്ടിരിക്കുന്ന രൂപമാണ് സ്തംഭം. അതിൻെറ നീളത്തിനു നേരെ കുറുകെ എവിടെയെങ്കിലുംവെച്ചു മുറിച്ചാൽ ആ മുറിപാടിനു ക്രാസ്സെക്ഷൻ എന്നു പറയുന്നു. അതു് എല്ലായിടത്തും ഒരുപോലെയിരിക്കും. രണ്ടററവും അതേ രൂപം തന്നെയായിരിക്കും. ക്രാസ്സെക്ഷൻെറ വിസ്തീൎണ്ണത്തെ സ്തംഭത്തിൻെറ നീളംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വ്യാപ്തം കിട്ടും.

സ്തംഭത്തിൻെറ നെടുനീളത്തിലുള്ള വശവും രണ്ടററവും ചേൎന്നതാണ് അതിൻെറ ഉപരിതലം. നെടുനീളത്തിലുള്ള വശത്തിനു് പുറമ്പാട്ട് എന്നു പറയാം. ക്രാസ്സെക്ഷൻെറ ചുററളവിനെ നീളംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണം കിട്ടും.

സ്തംഭത്തിൻെറ നീളത്തിനുപകരം ചിലപ്പോൾ ഉയരമെന്നും പറയേണ്ടിവരും.

സ്തംഭം രണ്ടു തരമുണ്ട്; കോണസ്തംഭവും വൃത്തസ്തംഭവും

കോണസ്തംഭം (പ്രിസം.) ഉദാ: ചില ഗോപുരങ്ങൾ, ചില പെൻസിൽ, ചതുരക്കട്ടികൾ. ഇതിൻെറ ക്രാസ് സെക്ഷനും രണ്ടററവും ത്രികോണിൻെറയോ, ചതുർഭുജത്തിൻെറയോ, മറേറതെങ്കിലും ബഹുഭുജത്തിൻെറയോ രൂപമായിരിക്കും. അതിൽ എത്ര ഭുജമുണ്ടോ അത്രയും ചതുരങ്ങളാണ് സ്തംഭത്തിൻെറ വശങ്ങൾ. അവയുടെയെല്ലാം വിസ്തീൎണ്ണംകൂടിച്ചേരുന്നതാണ് പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണം. അതിനോടു് രണ്ടററത്തിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണംകൂടി കൂട്ടിയാൽ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീൎണ്ണം കിട്ടും.

ഒരു ത്രികോണസ്തംഭത്തിനു് 10″ നീളമുണ്ടു്. അതിൻെറ ഓരോ അററവും 3″, 4″, 5″ ഈ ഭുജങ്ങളോടുകൂടിയ ത്രികോണമാണ്. എന്നാൽ സ്തംഭത്തിൻെറ വ്യാപ്തം, പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണം, ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീൎണ്ണം ഇവ കാണുക. (പുറമ്പാട്ട് 10″ × 3″, 10″ × 4″, 10″ × 5″ ഈ അളവിലുള്ള മൂന്നു ചതുരങ്ങളായിരിക്കും.)

ത്രികോണിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1} = 6$ ച. ഇ.

വ്യാപ്തം $= 6 \times 10 = 60$ ക്യൂ. ഇ.

ത്രികോണിൻെറ ചുററളവ് $= 12''$.

പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം $= 12 \times 10 = 120$ ച. ഇ.

രണ്ടററത്തെ വിസ്തീർണ്ണം $= 12$ ച. ഇ.

ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 132$ ച. ഇ.

വൃത്തസ്തംഭം. (സിലിണ്ടർ, ഗോളസ്തംഭം) ഉദാ. റൂൾത്തടി, ഉരുണ്ട തൂൺ, സാധാരണ പെൻസിൽ, വട്ടത്തിലുള്ള തകിട്ട്, റോളർ (ഉരുള്ള്). ഇതിൻെറ ക്രാസ്സെക്ഷനും രണ്ടററവും വൃത്താകൃതിയായിരിക്കും.

സൂത്രവാക്യം: r = ക്രാസ്സെക്ഷൻെറ വ്യാസാർദ്ധം ; h = ഉയരം അല്ലെങ്കിൽനീളം ; V = വ്യാപ്തം ; A = പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം; S = ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം.

$V = \pi r^2 h$; $A = 2\pi r h$; $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h.)$

ഒരു ഉരുളൻ തടിയുടെ നീളം 14 അടിയും വ്യാസം 10 ഇഞ്ചുമാണ്. അതിൻെറ വ്യാപ്തം, പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം, ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം ഇവ കണക്കാക്കുക.

വ്യാസാർദ്ധം $= 5'' = \frac{5}{12}$ അ.

ഒരററത്തിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം $= 3\frac{1}{7} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12}$ ച. അ.

വ്യാപ്തം $= \frac{22}{7} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times 14 = \frac{275}{36} = 7\frac{23}{36}$ ക്യൂ. അ.

ഒരററത്തിൻെറ ചുററളവ് $= 2 \times 3\frac{1}{7} \times \frac{5}{12}$ അ.

പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{12} \times 14 = \frac{110}{3} = 36\frac{2}{3}$ ച. അ.

രണ്ടററത്തെ വിസ്തീർണ്ണം $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{275}{252} = 1\frac{23}{252}$ ച. അ.

ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= 36\frac{2}{3} + 1\frac{23}{252} = 37\frac{191}{252}$ ച. അ.

സൂത്രവാക്യപ്രകാരമുള്ള ക്രിയ

$r = \frac{5}{12}$ അ; $h = 14$ അ.

വ്യാപ്തം $= V = 3\frac{1}{7} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times 14 = 7\frac{23}{36}$ ക്യ. അ.

പുറമ്പാട് $= A = 2 \times 3\frac{1}{7} \times \frac{5}{12} \times 14 = 36\frac{2}{3}$ ച. അ.

ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2 \times 3\frac{1}{7} \times \frac{5}{12} \left(\frac{5}{12} + 14\right)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{12} \times \frac{173}{12} = 37\frac{191}{252}$ ച. അ.

സ്തൂപിക. ഒരററം മുതൽ മറേറ അററംവരെ ക്രാസ്സെക്ഷൻ ഒരേ ആകൃതിയിലിരിക്കും; എന്നാൽ വലിപ്പം കുറഞ്ഞു കുറഞ്ഞു വരും. ഒടുവിൽ ഒരു മുനയിൽ അവസാനിക്കും. അതിന്ന് അഗ്രം എന്നും മറേറ അററത്തിന്ന് ചുവട് എന്നും പറയാം. അഗ്രത്തിൽനിന്ന് ചുവട്ടിലേക്ക് ഒരു ലംബരേഖ സങ്കല്പിച്ചാൽ അതു് സ്തൂപികയുടെ ഉയരമായോ നീളമായോ കണക്കാക്കാം. ചുവടിന്റെ വിസ്തീർണ്ണവും ഉയരവും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു് മൂന്നിലൊരു ഭാഗം എടുത്താൽ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കിട്ടും. സ്തംഭത്തിന്റെ പുറമ്പാടുപോലെ സ്തൂപികയ്ക്കും പുറമ്പാടുണ്ട്. സ്തൂപികയുടെ പുറമ്പാടും ചുവടും കൂടിച്ചേരുന്നതാണ് ആകെ ഉപരിതലം.

സ്തൂപികയും രണ്ടു തരമുണ്ട്; കോണസ്തൂപികയും വൃത്തസ്തൂപികയും.

കോണസ്തൂപിക (പിറമിഡ്). ഉദാ: ചില ഗോപുരത്തിന്റെ മേൽക്കൂര. ഇതിന്റെ ചുവട് ഒരു ബഹുഭുജമാണ്. ഓരോ ഭുജം മുതൽ അഗ്രംവരെയുള്ള പുറമ്പാട് ഓരോ ത്രികോൺ ആയിരിക്കും.

ഒരു സ്തൂപികയുടെ ചുവട് 4 അടി സമചതുരവും ഉയരം 12 അടിയുമാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം, പുറമ്പാട്, ഉപരിതലം ഇവ കണക്കാക്കുക. (ഉയരം ചുവടിന്റെ മദ്ധ്യസ്ഥാനത്തു് എത്തുന്നു. അവിടെനിന്നു ചുവടിന്റെ ഒരു ഭുജത്തിലേക്കുള്ള ലംബരേഖ ആ ഭുജത്തിന്റെ മദ്ധ്യ

ബിന്ദുവിൽ വന്നുചേരുന്നു. ഈ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് അഗ്രംവരെക്കുള്ള രേഖയുംകൂടിയാകുമ്പോൾ ഒരു ചതുര ത്രികോൺ കിട്ടും. അതിൻെറ കർണ്ണത്തിൻെറ നീളം കണക്കാക്കാം.)

ചുവടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം	$=16$ ച. അ.
ഉയരം	$=12$ അ.
വ്യാപ്തം	$=\frac{1}{3}\times 12\times 16=$ 64 ക്യു. അ.
ചതുരത്രികോണിൻെറ കർണ്ണം	$=\sqrt{12^2+2^2}=12\cdot 2$ അ.
പുറമ്പാടിലുള്ള ഒരു ത്രികോണിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം	
	$=\frac{1}{2}\times 4\times 12\cdot 2=24\cdot 4$ ച. അ.
പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം	$=4\times 24\cdot 4=97\cdot 6$ ച. അ.
	$=98$ ച. അ. (ഏകദേശം)
ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം	$=98+16=$ 114 ച അ.

വൃത്തസ്തൂപിക (കോൺ, സൂചീഖാതം, സൂചീസ്തംഭം). ഉദാ: ചോർപ്പ്, നെൽകൂന. ഇതിൻെറ ചുവട് വൃത്തമായിരിക്കും. അഗ്രത്തിൽനിന്നു പുറമ്പാടിൽക്കൂടി നേരെ താഴോട്ടു ചരിഞ്ഞ് ചുവടിൻെറ പരിധിവരെ ഒരു രേഖ സങ്കല്പിച്ചാൽ അതിന് സ്തൂപികയുടെ ചരിഞ്ഞ ഉയരം അല്ലെങ്കിൽ പാർശ്വോന്നതി എന്നു പറയുന്നു. ഉയരവും ചുവടിൻെറ വ്യാസാർദ്ധവും ചരിഞ്ഞ ഉയരവും ചേർന്നുള്ള രൂപം ഒരു ചതുര ത്രികോണാണ്.

സൂത്രവാക്യം : r = ചുവടിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം ; h = ഉയരം ; l = ചരിഞ്ഞ ഉയരം ; V = വ്യാപ്തം ; A = പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം ; S = ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം.

$$l=\sqrt{r^2+h^2};\quad r=\sqrt{l^2-h^2};\quad h=\sqrt{l^2-r^2}$$
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h:\quad A=\pi r l;\quad S=\pi r l+\pi r^2=\pi r\ (l+r)$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു കൂടാരത്തിന് 16 അടി ഉയരവും അതിൻെറ ചുവടിന് 24 അടി വ്യാസവും ഉണ്ട്. എന്നാൽ കൂടാരത്തിൻെറ വ്യാപ്തമെന്ത്. മേൽക്കൂരയ്ക്കു വേണ്ടിവരുന്ന തുണിയുടെ വിസ്തീർണ്ണം എന്ത്.

(തുണിയുടെ വിസ്തീർണ്ണം പുറമ്പാടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.)

ചുവടിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം $= 3\frac{1}{7} \times 12 \times 12$ ച. അ.
വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12 \times 12 \times 16 = 2413\frac{5}{7}$ ക്യൂ. അ.

ചരിഞ്ഞ ഉയരം $= \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ അ.
പുറമ്പാട് $= \frac{22}{7} \times 12 \times 20 = 754\frac{2}{7}$ ച. അ.
തുണിയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= 754\frac{2}{7}$ ച. അ

ഗോളം (സ്ഫീയർ) ഉദാ: പന്ത്. ഇത് പന്തുപോലെ ഉരുണ്ടിരിക്കും. അതിനെ നേർപകുതിയായി മുറിച്ചാൽ ഓരോ ഭാഗത്തിനും ഗോളാർദ്ധം (അർദ്ധഗോളം) എന്നു പേർ; ക്രാസ്സെക്ഷൻ ഒരു വൃത്തവുമായിരിക്കും. അതിൻെറ വ്യാസം ഗോളത്തിൻെറയും വ്യാസമാണ്; അതിൻെറ കേന്ദ്രം ഗോളത്തിൻെറയും കേന്ദ്രമാണ്. ഗോളത്തിൻെറ പുറമ്പാടും ആകെ ഉപരിതലവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.

സൂത്രവാക്യം: r = വ്യാസാർദ്ധം; V = വ്യാപ്തം; A = പുറമ്പാട്.
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $A = 4\pi r^2$.

ഗോളാർദ്ധത്തിൻെറ ഒരു വശം ഒരു പരന്ന വൃത്തമായിരിക്കും; മറേറവശം പുറമ്പാടുമാണ്. രണ്ടുംകൂടി ചേർന്നതു് ആകെ ഉപരിതലവുമാണ്.

സൂത്രവാക്യം: r = വ്യാസാർദ്ധം; V = വ്യാപ്തം; A = പുറമ്പാട്; S = ഉപരിതലം.

$V = \frac{2}{3}\pi r^3$; $A = 2\pi r^2$; $S = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$.

14 ഇഞ്ചു വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളാർദ്ധത്തിൻെറ വ്യാപ്തം കാണുക.
വ്യാപ്തം $= \frac{4}{3} \times 3\frac{1}{7} \times 7 \times 7 \times 7 = 1437\frac{1}{3}$ ക്യൂ. ഇ.

മുകളിൽ വിവരിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രമാണങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ആ രൂപങ്ങളിൽനിന്നു വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ചില രൂപങ്ങളുടെ അളവുകൾ നിർണ്ണയിക്കാം.

കുഴൽ. അകം പൊള്ളയായ ഒരു വൃത്തസ്തംഭമാണ് കുഴൽ. ഒരു സ്തംഭത്തിനകത്തു മറ്റൊരു സ്തംഭം വെച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ് അതിന്റെ ആകൃതി. രണ്ടിനുമിടയ്ക്കുള്ള ഭാഗം കട്ടിയായിരിക്കും. കട്ടിയായ ഭാഗത്തിന്റെ ക്രാസ്സെക്ഷൻ രണ്ടു സവൃത്തങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള ഒരു വലയമാണ്. വലയത്തിന്റെ വീതി കട്ടിയായ ഭാഗത്തിന്റെ വണ്ണമാണ്. അതു് രണ്ടു വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെയും വ്യത്യാസമായിരിക്കും; അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു വ്യാസം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതി. വലയത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ കുഴലിന്റെ നീളംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ കട്ടിയായ ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കിട്ടും. അകത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെയും പുറത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം തമ്മിൽ കുറച്ചാലും അതേഫലം തന്നെയാണു കിട്ടുന്നതു്. കുഴലിന്റെ ഭാരം കട്ടിയായ ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തമനുസരിച്ചിരിക്കും. അകത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെ പുറമ്പാട്ട് കുഴലിന്റെ അകമ്പാട്ടും പുറത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെ പുറമ്പാട്ട് കുഴലിന്റെ പുറമ്പാട്ടുമാണ്. കുഴലിന്റെ രണ്ടറ്റവും ഓരോ വലയമായിരിക്കും. അകമ്പാട്ടും പുറമ്പാട്ടും രണ്ടറ്റത്തുള്ള വലയവുംകൂടിച്ചേരുന്നതു് ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണവുമാണ്.

സൂത്രവാക്യം:— r = കുഴലിന്റെ അകത്തെ വ്യാസാർദ്ധം; R = പുറത്തെ വ്യാസാർദ്ധം; h = നീളം; d = കട്ടിയായ ഭാഗത്തിന്റെ വണ്ണം; V = കട്ടിയായ ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം; A = പുറമ്പാട്ട്; A' = അകമ്പാട്ട്; a = ഒരറ്റത്തെ വലയത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം. S = ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം.

$$d = R - r.$$
$$a = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$
$$A = 2\pi R h \; ; \; A' = 2\pi r h,$$
$$S = 2\pi R h + 2\pi r h + 2\pi (R^2 - r^2)$$
$$= 2\pi h (R + r) + 2\pi (R + r)(R - r)$$
$$= 2\pi (R + r)(h + R - r)$$
$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h (R^2 - r^2)$$

നോട്ട്: R^2-r^2 കണക്കാക്കുന്നതിന് $(R+r)(R-r)$ എന്നെടുക്കുന്നതു് ചിലപ്പോൾ സൗകര്യമായിരിക്കും.

ഒരു ഇരുമ്പുകുഴലിന് 7 അടി നീളമുണ്ടു്. അതിൻെറ പുറത്തെ വ്യാസം 10 ഇഞ്ചും ഇരുമ്പിൻെറ വണ്ണം $\frac{1}{2}$ ഇഞ്ചുമാണ്. ഒരു ക്യൂ. അ. ഇരുമ്പിന് 480 പൗണ്ടുതൂക്കമുണ്ടെങ്കിൽ കുഴലിൻെറ തൂക്കമെന്തു്. കുഴലിൻെറ അകത്തും പുറത്തും ചായമിടുന്നതിന് ച. അ. ഒന്നിന് 8 ണം. വീതം ആകെ എന്തു ചിലവാകും.

പുറത്തെ വ്യാസാർദ്ധം $= 5$ ഇ.

അകത്തെ വ്യാസാർദ്ധം $= 4\frac{1}{2}$ ഇ.

ക്രാസ് സെക്ഷൻെറ വിസ്തീർണ്ണം $= 3\frac{1}{7}\,(5^2-4\frac{1}{2}{}^2)$

$= 3\frac{1}{7}\,(5+4\frac{1}{2})(5-4\frac{1}{2})$ ച. ഇ.

$= \frac{22}{7}\times\frac{19}{12\times 2}\times\frac{1}{12\times 2}$ ച. അ.

ഇരുമ്പിൻെറ വ്യാപ്തം $= \frac{22}{7}\times\frac{19}{12\times 2}\times\frac{1}{12\times 2}\times 7$ ക്യൂ. അ.

ഇരുമ്പിൻെറ തൂക്കം $= \frac{22}{7}\times\frac{19}{12\times 2}\times\frac{1}{12\times 2}\times 7\times 480$ പൗ.

$= 348\frac{1}{3}$ പൗ.

പുറമ്പാട് $= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{12}\times 7 = 18\frac{1}{3}$ ച. അ.

അകമ്പാട് $= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{9}{2\times 12}\times 7 = 16\frac{1}{2}$ ച. അ.

രണ്ടുംകൂടി $= 34\frac{5}{6}$ ച. അ.

ആകെ ചിലവ് $= 34\frac{5}{6}\times\frac{1}{2} = 17\frac{5}{12}$ രൂ.

$= 17$ രൂ. 6 ണ. 8 പൈ.

നോട്ട്. രണ്ടററത്തെ വിസ്തീർണ്ണം വളരെ ചെറുതായതിനാൽ അതു കണക്കാക്കിയിട്ടില്ല.

സ്തംഭവും സ്തൂപികയും ചേർന്നതു്. സ്തംഭത്തിൻെറ ഒരററവും സ്തൂപികയുടെ ചുവടും ചേർന്നിരിക്കും. സ്തൂപിക സ്തംഭത്തിൻെറ ഒരററത്തു മാത്രവുമാകാം; രണ്ടററത്തുമാകാം.

ഒരു കൂടാരത്തിന്‍െറ രൂപം ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിനു മുകളില്‍ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക വെച്ചതുപോലെയാണ്. കൂടാരത്തിന്‍െറ തറയ്ക്കു് 16 അ. വ്യാസമുണ്ട്. നടുക്കുള്ള ഉയരം 15 അടിയും ചുററുപാടുമുള്ള ഉയരം 9 അടിയുമാണ്. കൂടാരത്തിന്‍െറ അകത്തെ വ്യാപ്തമെന്തു്. അതിനു വേണ്ടിവരുന്ന തുണിയുടെ ആകെ വിസ്തീര്‍ണ്ണമെന്തു്.

വ്യാസാര്‍ദ്ധം $= 8$ അ.

സ്തൂപികയുടെ ഉയരം $= 15-9 = 6$ അ.

സ്തൂപികയുടെ ചരിഞ്ഞ ഉയരം $= \sqrt{8^2+6^2} = 10$ അ.

സ്തംഭത്തിന്‍െറ ഉയരം $= 9$ അ.

സ്തംഭത്തിന്‍െറ വ്യാപ്തം $= \frac{22}{7} \times 8 \times 8 \times 9$ ക്യൂ. അ.

സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 8 \times 8 \times 6$ ക്യൂ. അ.

ആകെ വ്യാപ്തം $= \frac{22}{7} \times 8 \times 8 \left(9 + \frac{1}{3} \times 6\right)$

$= \frac{22}{7} \times 8 \times 8 \times 11$ ക്യൂ. അ.

$= 2212\frac{4}{7}$ ക്യൂ. അ.

സ്തംഭത്തിന്‍െറ പുറമ്പാട്ട് $= 2 \times \frac{22}{7} \times 8 \times 9$ ച. അ.

സ്തൂപികയുടെ പുറമ്പാട്ട് $= \frac{22}{7} \times 8 \times 10$ ച. അ.

ആകെ തുണിയുടെ വിസ്തീര്‍ണ്ണം $= \frac{22}{7} \times 8 \, (2 \times 9 + 10)$

$= \frac{22}{7} \times 8 \times 28$ ച. അ.

$= 704$ ച. അ.

വൃത്തസ്തംഭവും ഗോളാര്‍ദ്ധവും ചേര്‍ന്നതു്. സ്തംഭത്തിന്‍െറ അററവും ഗോളാര്‍ദ്ധത്തിന്‍െറ പരന്ന വശവും ചേര്‍ന്നിരിക്കും. ഗോളാര്‍ദ്ധം സ്തംഭത്തിന്‍െറ ഒരററത്തു മാത്രവുമാകാം; രണ്ടററത്തുമാകാം.

ഒരു ഗോപുരത്തിന്‍െറ രൂപം ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിനു മുകളില്‍ ഒരു ഗോളാര്‍ദ്ധം വെച്ചതുപോലെയാണ്. അതിന്‍െറ വ്യാസം 14 അടിയും നടുക്കുള്ള ഉയരം 27 അടിയുമാണ്. അതിന്‍െറ വ്യാപ്തമെന്തു്. ഉപരിതലവിസ്തീര്‍ണ്ണമെന്തു്.

വ്യാസാര്‍ദ്ധം $= 7$ അ.

ഗോളാര്‍ദ്ധത്തിന്‍െറ ഉയരം $= 7$ അ.

സ്തംഭത്തിന്‍െറ ഉയരം $= 27-7 = 20$ അ.

സ്തംഭത്തിൻെറ വ്യാപ്തം $= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 20 = 3080$ ക്യൂ. അം.

ഗോളാദ്ധത്തിൻെറ വ്യാപ്തം $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$

$= 718\frac{2}{3}$ ക്യൂ. അം.

ആകെ വ്യാപ്തം $= 3898\frac{2}{3}$ ക്യൂ. അം.

സ്തംഭത്തിൻെറ പുറമ്പാട്ട് $= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 20 = 880$ ച. അം.

ഗോളാദ്ധത്തിൻെറ പുറമ്പാട്ട് $= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 308$ ച. അം

ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= 880 + 308 = 1188$ ച. അം.

വൃത്തസ്തൂപികയും ഗോളാദ്ധവും ചേന്നതു്. സ്തൂപികയുടെ ചുവട്ടം ഗോളാദ്ധത്തിൻെറ പരന്ന വശവും ചേന്നിരിക്കും.

ഒരു പമ്പരത്തിൻെറ ആകൃതി വൃത്തസ്തൂപികയും ഗോളാദ്ധവും ചേന്നതുപോലെയാണ്. രണ്ടിൻെറയും വ്യാസം $2\frac{1}{2}$ ഇഞ്ചും ആകെ നീളം $4\frac{1}{4}$ ഇഞ്ചുമാണ്. എന്നാൽ അതിൻെറ വ്യാപ്തവും ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.

വ്യാസാദ്ധം $= 1\frac{1}{4}$ ഇ.

സ്തൂപികയുടെ ഉയരം $= 4\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 3$ ഇ.

സ്തൂപികയുടെ ചരിഞ്ഞ ഉയരം $= \sqrt{3^2 + 1\frac{1}{4}^2} = 3\frac{1}{4}$ ഇ.

സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times 3$ ക്യൂ. ഇ.

ഗോളാദ്ധത്തിൻെറ വ്യാപ്തം $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4}$ ക്യൂ. ഇ.

ആകെ വ്യാപ്തം $= \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}\right)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{11}{6} = 9\frac{1}{336}$ ക്യൂ. ഇ.

സ്തൂപികയുടെ പുറമ്പാട്ട് $= \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{13}{4}$ ച. ഇ.

ഗോളാദ്ധത്തിൻെറ പുറമ്പാട്ട് $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4}$ ച. ഇ.

ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \left(\frac{13}{4} + 2 \times \frac{5}{4}\right)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{23}{4} = 22\frac{33}{56}$ ച. ഇ.

അകം പൊള്ളയായ ഗോളാദ്ധം. ചീനച്ചട്ടിയുടെ ആകൃതി ഇതു പോലെയാണ്. ഒരു ഗോളാദ്ധത്തിനകത്തു മറെറാരു ഗോളാദ്ധം

വെച്ചിരിക്കുന്നപോലെയാണ് ഈ രൂപം. രണ്ടിനുമിടയ്ക്കുള്ള ഭാഗം കട്ടിയായിരിക്കും. കട്ടിയായ ഭാഗത്തിന്റെ വണ്ണം അകത്തെ വ്യാസാൎദ്ധവും പുറത്തെ വ്യാസാൎദ്ധവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. അതിന്റെ വക്ക് രണ്ടു സവൃത്തങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള വളയംപോലെയിരിക്കും. പുറമ്പാടും അകമ്പാടും വക്കും ചേൎന്നതാണ് ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീൎണ്ണം. വക്കിന്റെ വിസ്തീൎണ്ണം സാധാരണ വളരെ ചെറുതായിരിക്കും.

അൎദ്ധ ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു മരക്കലത്തിന്റെ പുറത്തെ വ്യാസം 14 ഇഞ്ചും അകത്തെ വ്യാസം 12 ഇഞ്ചുമാണ്. അതിന്റെ ഉള്ളളവ് എന്ത്. തടിയുടെ വ്യാപ്തമെന്ത്. ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീൎണ്ണമെന്ത്.

പുറത്തെ വ്യാസാൎദ്ധം	$= 7$ ഇ.
അകത്തെ വ്യാസാൎദ്ധം	$= 6$ ഇ.
അകത്തെ വ്യാസം	$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 6$
	$= 905\frac{1}{7}$ ക്യൂ. ഇ.
ഉള്ളളവ്	$= 905\frac{1}{7}$ ക്യൂ. ഇ.
പുറത്തെ വ്യാപ്തം	$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$
	$= 1437\frac{1}{3}$ ക്യൂ. ഇ.
തടിയുടെ വ്യാപ്തം	$= 1437\frac{1}{3} - 905\frac{1}{7}$
	$= 532\frac{4}{21}$ ക്യൂ. ഇ.
പുറമ്പാട്	$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 308$ ച. ഇ.
അകമ്പാട്	$= 2 \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 = 226\frac{2}{7}$ ച. ഇ.
വക്ക്	$= \frac{22}{7}(7^2 - 6^2) = \frac{22}{7} \times 13$
	$= 40\frac{6}{7}$ ച. ഇ.
ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീൎണ്ണം	$= 308 + 226\frac{2}{7} + 40\frac{6}{7}$
	$= 575\frac{1}{7}$ ച. ഇ.

അഭ്യാസം 10

1. സ്ഫടികംകൊണ്ടുള്ള ഒരു ത്രികോണസ്തംഭത്തിൻെറ നീളം 10 സെ. മീ. ആകുന്നു. ഒരററം ഒരു ചതുര ത്രികോണമാണ്. അതിൻെറ കർണ്ണത്തിനു് 2·5 സെ. മീ. നീളമുണ്ടു്; മററെ രണ്ടു ഭുജങ്ങളും തുല്യവുമാണു്. ഒരു ക്യൂ. സെ. മീ. സ്ഫടികത്തിനു് 3·2 ഗ്രാം തൂക്കമുണ്ടെങ്കിൽ സ്തംഭത്തിൻെറ തൂക്കമെന്തു്.

2. കോണസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഗോപുരത്തിൻെറ ചുവടിനു് 8 ഭുജമുണ്ടു്. ഓരോന്നിനും 4 അടി നീളവുമുണ്ടു്. ഗോപുരത്തിൻെറ പൊക്കം 42 അടിയാണെങ്കിൽ ചുവരുകളുടെ ആകെ വിസ്തീർണ്ണമെന്തു്.

3. കോണസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു സ്വർണ്ണക്കട്ടിക്കു് 15 സെ. മീ. നീളമുണ്ടു്. ഓരോ അററവും 6 സമഭുജങ്ങളും സമകോണുകളുമുള്ള രൂപമാണു്. ഒരു ഭുജത്തിനു് 3 സെ. മീ. നീളമുണ്ടെങ്കിൽ സ്വർണ്ണക്കട്ടിയുടെ തൂക്കമെന്തു്. 1 ക്യൂ. സെ. മീ. സ്വർണ്ണത്തിൻെറ തൂക്കം = 19·3 ഗ്രാം.

4. ഉരുണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു പെൻസിലിനു് 6 ഇ. നീളവും ·3 ഇ. വണ്ണവുമുണ്ടു്. എന്നാൽ 56000 പെൻസിലിൻെറ ആകെ വ്യാപ്തം എത്ര ക്യൂ. അം. ആകെ പുറമ്പരപ്പ് എത്ര ച. അം.

5. 12 അടി നീളമുള്ള ഒരു ഇരുമ്പുകുഴലിൽ അകത്തു് .7″ വ്യാസമുണ്ടു്. ഇരുമ്പിൻെറ വണ്ണം ·05″ ആണെങ്കിൽ കുഴലിൻെറ തൂക്കമെന്തു്. ഒരു ക്യൂ. അ. ഇരുമ്പിനു് 476 പൗ. തൂക്കമുണ്ടു്.

6. നീണ്ടുരുണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കുഴലിനകത്തു് 48 സെ. മീ. ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ടു്. അതു ചോർത്തിയെടുത്തു് അളന്നപ്പോൾ 84 ക്യൂ. സെ. മീ. ഉണ്ടായിരുന്നു. എന്നാൽ കുഴലിൻെറ വ്യാസം എത്ര സെ. മീ. (ഒന്നാം ദശാംശംവരെ ചുരുക്കി).

7. 4 മീററർ നീളവും ഒരു മി. മീ. വ്യാസവുമുള്ള ഒരു ഉരുണ്ട സ്വർണ്ണക്കമ്പിയുടെ തൂക്കം എത്ര ഗ്രാം. ഒരു ക്യൂ. സെ. മീ. സ്വർണ്ണത്തിൻെറ തൂക്കം 19·1 ഗ്രാം. $\pi = 3{\cdot}1416$. (ഒന്നാം ദശാംശസ്ഥാനംവരെ.)

8. ഒരു പെട്രോൾ ടാങ്കു് 16 അടി വ്യാസവും $10\frac{1}{2}$ അടി ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിൻെറ ആകൃതിയിലുള്ളതാണു്. ഒരു ക്യൂബിക്കടിക്കു് $6\frac{1}{4}$ ഗ്യാലൻ വീതം കണക്കാക്കിയാൽ ആ ടാങ്കിൽ എത്ര ഗ്യാലൻ പെട്രോൾ കൊള്ളും.

9. ഒരു മൈൽ നീളമുള്ള ഒരു റോഡിൽ രണ്ടുവരി ഇലക്ട്രിക്ക് കമ്പി ഇടുന്നതിനു $\frac{1}{4}''$ വണ്ണത്തിലുള്ള ചെമ്പുകമ്പി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു ക്യൂബിക്കടി ചെമ്പിൻെറ തൂക്കം 546 പൗണ്ടാണെങ്കിൽ ആകെ വേണ്ടി വരുന്ന കമ്പിയുടെ തൂക്കമെന്തു്.

10. 66 ഗജം നീളവും 11 അടി താഴ്ചയുമുള്ള ഒരു കിടങ്ങു കുഴിക്കുന്നു. കിടങ്ങിൻെറ മുകൾപ്പരപ്പിൽ 12 അടിയും ചുവട്ടിൽ 9 അടിയും വീതിയുണ്ടു്. കിടങ്ങിൽ നിന്നുള്ള മണൽ 75 സെൻറ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു പുരയിടത്തിൽ ഒരുപോലെ നിരത്തുകയാണെങ്കിൽ അതിൻെറ നിരപ്പു് എത്ര ഉയരും.

11. 8 ഇഞ്ചു വ്യാസമുള്ള ഒരു കുഴൽവഴി 3 ഏക്കർ 20 സെൻറു് വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു നിലത്തിൽ വെള്ളം പാഞ്ഞുവീഴുന്നു. 3 മണിക്കൂർ കൊണ്ടു് ജലനിരപ്പു് $1\frac{1}{4}$ ഇ. ഉയരുന്നെങ്കിൽ കുഴൽവഴി ഒരു മിനിട്ടിൽ എത്രയടി വേഗത്തിൽ വെള്ളം പായുന്നു.

12. 4 ഏക്കർ 40 സെൻറ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു നിലത്തിൽ 28 ഇ. താഴ്ചയിൽ വെള്ളം കിടപ്പുണ്ടു്. 14 ഇ. വ്യാസമുള്ള ഒരു കുഴൽവഴി മിനിട്ടു് ഒന്നിനു് 242 അ. വീതം വേഗത്തിൽ അതിൽനിന്നു വെള്ളം പായിച്ചു പുറത്തേക്കു കളയുകയാണെങ്കിൽ വെള്ളം വററുന്നതിനു് എന്തു സമയം വേണം.

13. 35 സെൻറ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു കുളത്തിൽനിന്നു് ഒരു കുഴൽ വഴി മിനിട്ടു് ഒന്നിനു് 154 അ. വേഗത്തിൽ വെള്ളം പായിച്ചു പുറത്തേക്കുതള്ളുന്നു. $5\frac{1}{4}$ മണിക്കൂർകൊണ്ടു് ജലനിരപ്പു് $2\frac{1}{2}$ അ. താഴുന്നെങ്കിൽ കുഴലിൻെറ വ്യാസമെന്തു്.

14. ഒരു നിലത്തിൽ 5 അ. താഴ്ചയിൽ വെള്ളമുണ്ടു്. 14 ഇ. വ്യാസമുള്ള ഒരു കുഴൽവഴി മിനിട്ടൊന്നിനു് 550 അടി വേഗത്തിൽ അതിൽനിന്നു വെള്ളം പമ്പുചെയ്തു പുറത്തേക്കു തള്ളുന്നു. ഒരു ദിവസം 18 മണിക്കൂർ വീതം ജോലി ചെയ്താൽ 6 ദിവസംകൊണ്ടു് വെള്ളം വററുന്നെങ്കിൽ നിലത്തിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം എത്ര ഏക്കർ.

15. ഒരു സാധനം വെള്ളത്തിൽ മുക്കുമ്പോൾ അതിൻെറ വ്യാപ്തത്തോളം വെള്ളത്തിനുള്ള തൂക്കം അതിൽനിന്നു കുറയുന്നതായി തോന്നും. 4 സെ. മീ. വ്യാസവും 10.5 സെ. മീ. ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ വാർത്തിട്ടുള്ള ഒരു ഇരുമ്പു കഷണത്തിൻെറ തൂക്കവും വെള്ളത്തിൽ മുക്കിയിട്ടു തൂക്കിയാൽ കാണുന്ന തൂക്കവും കാണുക. ഒരു

ക്യൂ. സെ. ഇരുമ്പിന്റെ തൂക്കം 7.5 ഗ്രാം; ഒരു ക്യൂ. സെ. വെള്ളത്തിന്റെ തൂക്കം = 1 ഗ്രാം.

16. വ്യാസവും ഉയരവും തുല്യമായ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രം നിറയെ വെള്ളമുണ്ട്. അതേവ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളം പാത്രത്തിനകത്തു് താഴ്ത്തിയിട്ടാൽ കുറെ വെള്ളം പുറത്തേക്കൊഴുകിപ്പോകും. ബാക്കിയുള്ള വെള്ളം ആദ്യമുണ്ടായിരുന്നതിന്റെ എന്തംശം.

17. $1\frac{1}{2}$ ഇ. വ്യാസത്തിൽ ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഈയക്കഷ്ണം അടിച്ചുപരത്തി ·01 ഇഞ്ചു വണ്ണത്തിൽ വൃത്താകൃതിയായ ഒരു തകിടാക്കി എടുക്കുന്നു. എന്നാൽ തകിടിന്റെ വ്യാസമെന്തു്.

18. 1·6 സെ. മീ. വ്യാസവും 2·5 സെ. മീ. ഉയരവുമുള്ള വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലിരിക്കുന്ന ഒരു സ്വർണ്ണക്കട്ടി അടിച്ചുപരത്തി 10 സെ. മീ. നീളത്തിലുള്ള ഒരു സമചതുരത്തകിടാക്കിയാൽ തകിടിന്റെ വണ്ണം എത്ര മി. മീ. (രണ്ടാം ദശാംശസ്ഥാനം വരെ) $\pi = 3·14$.

19. ഒരിഞ്ചു വ്യാസമുള്ള ഒരു കുഴൽവഴി വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൊട്ടിയിൽ വെള്ളം വന്നു വീഴുന്നു. തൊട്ടിക്കു് $3\frac{1}{2}$ അടി പൊക്കവും അത്രയും വ്യാസവുമുണ്ട്. 9 മണിക്കൂർ 48 മിനിട്ടു കൊണ്ടു് തൊട്ടി നിറയുന്നതായാൽ കുഴൽവഴി മിനിട്ടു് ഒന്നിനു് എത്ര അടി വീതം വേഗത്തിൽ വെള്ളം പായുന്നു.

20. ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്മേൽ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ആകൃതിയിൽ ഒരു കൂടാരമുണ്ടു്. അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ 12 അടി വ്യാസവും നടുക്കു് $9\frac{1}{2}$ അടി ഉയരവും ചുററുപാടും 5 അടി ഉയരവും ഉണ്ടു്. കൂടാരത്തിനു് ആവശ്യമുള്ള ക്യാൻവസ് 36 ഇ. വീതിയുള്ളതാണു്. ക്യാൻവസ് മുറിച്ചു തയ്ക്കുന്നതിൽ 12% നഷ്ടപ്പെടുന്നു. എന്നാൽ ആകെ എത്ര ഗജം ക്യാൻവസ് വാങ്ങണം.

21. ഒരു സ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള കൂടാരത്തിന്റെ ചുവടു് 10 അടി സമചതുരവും നടുക്കുള്ള പൊക്കം 12 അടിയുമാണു്. അതിനാവശ്യമുള്ള ക്യാൻവസിനു് 52 ഇ. വീതിയുണ്ടെങ്കിൽ എത്ര ഗജം ക്യാൻവസ് വാങ്ങണം. ക്യാൻവസ് മുറിച്ചു തയ്ക്കുന്നതിൽ $\frac{1}{16}$ ഭാഗം നഷ്ടം വരുമെന്നു കണക്കാക്കണം.

22. ഒരേ വലിപ്പത്തിലുള്ള 750 വെടിയുണ്ടകൾ തൂക്കിനോക്കിയപ്പോൾ 35·2 ഗ്രാം തൂക്കമുണ്ടായിരുന്നു. ഒരു ക്യൂ. സെ. മീ. ലോഹത്തിനു് 11·2 ഗ്രാം തൂക്കമുണ്ടെങ്കിൽ ഒരു വെടിയുണ്ടയുടെ വ്യാസമെന്തു്.

അഭ്യാസം 11

(S. S. L. C. Questions)

1. നീണ്ടുരുണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കരിങ്കല്ലിന് 4 അടി നീളവും 4 ടൺ 8 ഹൺ. തൂക്കവുമുണ്ട്. ഒരു ക്യൂബിക്കടി കല്ലിൻെറ തൂക്കം 441 പൗണ്ടാണെങ്കിൽ കരിങ്കല്ലിൻെറ വ്യാസം കാണുക.

2. 6 അടി വ്യാസവും 4 അടി ഉയരവും ഉള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ ഉപ്പു ശേഖരിച്ചിരിക്കുന്നു. മഴ നനയാതെ അതു മുഴുവൻ മൂടുവാൻ വേണ്ട മെഴുകുതുണിക്കു എന്തു വിസ്തീർണ്ണമുണ്ടായിരിക്കണം. അതിന് ച. ഗ. ഒന്നിനു 1 രൂ. 5 ണ. വീതം ആകെ വിലയെന്താകും.

3. 1 അടി 2 ഇഞ്ചു പൊക്കവും 4 ഇഞ്ചു വ്യാസാർദ്ധവുമുള്ള ഒരു പാത്രത്തിൻെറ വ്യാപ്തമെന്തു്.

4. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു കുമിളിനു $3\frac{1}{2}$ ഇം. പൊക്കവും അതിൻെറ വക്കിനു 3 ഇഞ്ചു വ്യാസവുമുണ്ട്. എന്നാൽ അതിൻെറ വ്യാപ്തമെന്തു്.

5. ഒരു കിണറിനു 12 ഗജം ആഴമുണ്ട്. അതിൻെറ അകത്തെ വ്യാസം 7 അടിയാണ്. എന്നാൽ അകത്തെ വ്യാപ്തമെന്തു്. കിണറിനു 1 അ. 2 ഇ. വണ്ണത്തിൽ കൽക്കെട്ടുണ്ടെങ്കിൽ കൽക്കെട്ടിൻെറ വ്യാപ്തമെന്തു്.

6. സ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു കൂടാരത്തിനു 16 അടി പൊക്കമുണ്ട്. ചുവട് 64 ച. ഗ. വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുരമാണ്. എന്നാൽ കൂടാരത്തിനുവേണ്ട തുണിയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

7. ഒരു വാസനപൗഡർ വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള രണ്ടു തരം ടിന്നിൽ വിൽക്കുന്നു. ചെറിയ ടിന്നിനു 1·4 ഇ. വ്യാസവും 2 ഇ. പൊക്കവും വലിയ ടിന്നിനു 2 ഇ. വ്യാസവും 2·5 ഇ. പൊക്കവുമുണ്ട്. ചെറിയ ടിന്നിനു 8 ണ. യും വലുതിനു 1 രൂപയും വിലയാണെങ്കിൽ ഏതു ടിൻ വാങ്ങുന്നതു ലാഭകരമായിരിക്കും. എന്തുകൊണ്ട്.

8. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ ധാന്യം ശേഖരിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിൻെറ ചുവട്ടിലെ വ്യാസം 17 അ. 6 ഇഞ്ചും പൊക്കം 6 അ

ടിയുമാണ്. ഒരു പറയ്ക്കു് 800 ഘ. ഇ. വീതം കണക്കാക്കിയാൽ ധാന്യം എത്ര പറ കാണും.

9. വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഈയത്തകിടിന്നു് 3 ഇ. വണ്ണവും 12 ഇ. വ്യാസവുമുണ്ടു്. അതിൽനിന്നു് ·05 ഇ. വ്യാസാൎദ്ധമുള്ള വെടിയുണ്ടകൾ നിൎമ്മിച്ചാൽ എത്രയെണ്ണം കിട്ടും.

10. $1\frac{1}{2}$ അടി വ്യാസത്തിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു വീപ്പയിൽ മണ്ണെണ്ണയുണ്ടു്. അതിൽനിന്നു് 4 ഗ്യാലൻ കൊള്ളുന്ന ഒരു പാട്ട മണ്ണെണ്ണ എടുത്താൽ വീപ്പയിലെ മണ്ണെണ്ണയുടെ നിരപ്പു് എത്ര താഴും. (1 ഗ്യാലൻ = $277\frac{1}{4}$ ഘ. ഇ.)

11. ഒരു കുഴലിന്റെ അകത്തെ വ്യാസം $\frac{1}{2}$ ഇഞ്ചാണ്. അതിൽക്കൂടി സെക്കൻഡു് ഒന്നിന്നു് $1\frac{1}{2}$ അടി വീതം വേഗത്തിൽ വെള്ളം ഒഴുകി 5 അ. നീളവും 2 അ. 9 ഇ. വീതിയുമുള്ള ഒരു തൊട്ടിയിൽ വീഴുന്നു. തൊട്ടിയിൽ 6 ഇ. പൊക്കത്തിൽ വെള്ളം നിറയുന്നതിന്നു് എന്തു സമയം വേണം.

12. നെടുനീളം 1 ഇ. വ്യാസത്തിൽ ഉരുണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വടിയുടെ ഒരററം ഗോളാൎദ്ധത്തിന്റെയും മററെ അററം വൃത്തസ്തൂപികയുടെയും ആകൃതിയിലിരിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടററം ഒഴിച്ചു ബാക്കിയുള്ള നീളം 2 അ. 4 ഇഞ്ചും സ്തൂപികയുടെ ചരിഞ്ഞ ഉയരം 6 ഇഞ്ചുമാണ്. വടി മുഴുവൻ ചായമിടുന്നതിന്നു ച. ഇ. ഒന്നിന്നു് 3 പൈ വീതം ആകെ എന്തു ചാൎജാകും.

13. ഒരു തോടിൽ 6 അ. താഴ്ചയിൽ വെള്ളമുണ്ടു്. ജലപ്പരപ്പിന്നു 15 അ. വീതിയും തോടിന്റെ അടിത്തട്ടിന്നു 10 അ. വീതിയുമുണ്ടു്. ഒരു മണിക്കൂറിൽ 4 മൈൽ വേഗത്തിൽ വെള്ളം ഒഴുകി ഒരു നദിയിലേക്കു പായുന്നു. എന്നാൽ ഒരു മിനിട്ടിൽ എത്ര ഘ. അ. വെള്ളം നദിയിൽ വീഴുന്നു.

14. അൎദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ അകത്തെ വ്യാസം 10 ഇഞ്ചും ലോഹത്തിന്റെ വണ്ണം 1 ഇഞ്ചുമാണ്. എന്നാൽ അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീൎണ്ണം കാണുക. ഒരു ഘ. അ. ലോഹത്തിന്നു് 432 പൗണ്ടു തൂക്കമുണ്ടെങ്കിൽ പാത്രത്തിന്റെ തൂക്കമെന്തു്.

15. നടുക്കു വൃത്തസ്തംഭവും രണ്ടററത്തു ഗോളാൎദ്ധവും ചേൎന്നുള്ള രൂപത്തിൽ ഒരു പെട്രോൾടാങ്കുണ്ടു്. സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഭാഗത്തിന്നു

തനിച്ചു് 8 അ. നീളവും $3\frac{1}{2}$ അ. വ്യാസവും ഉണ്ടു്. എന്നാൽ ടാങ്കിൽ എത്ര ഗ്യാലൻ പെട്രോൾ അടയ്ക്കാം. 1 ഘ അ. $= 6\frac{1}{4}$ ഗ്യാലൻ. ടാങ്കിന്റെ പുറം മുഴുവൻ ചായമിടുന്നതിനു് ച. അ. ഒന്നിനു് 2 ണ. വീതം ആകെ ചിലവെന്തു്. (ലോഹത്തിന്റെ വണ്ണം തള്ളിക്കളയാം.)

16. 4 സെ. മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഗോളാകൃതിയായ ഒരു ചെമ്പു കട്ടി അടിച്ചുനീട്ടി ഉരുണ്ട കമ്പിയാക്കി വലിച്ചെടുക്കുന്നു. കമ്പിയുടെ വണ്ണം 1·6 മി. മീ. ആണെങ്കിൽ നീളം എത്ര മീററർ.

മേല്പറഞ്ഞ ഗോളം ഉരുക്കി 16 സെ. മീ. പൊക്കമുള്ള ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ രൂപത്തിൽ വാർത്തെടുത്താൽ അതിന്റെ ചുവട്ടിലെ വ്യാസമെന്തായിരിക്കും.

17. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം ചുവട്ടിലെ വ്യാസത്തിനു തുല്യമാണു്. അതേ വ്യാസത്തിലുള്ള ഒരു ഗോളമുണ്ടെങ്കിൽ രണ്ടിന്റെയും വ്യാപ്തം താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

18. 121 അ. നീളവും $38\frac{1}{2}$ അ. വീതിയുമുള്ള ഒരു പുരയിടത്തിൽ 7 അ. വ്യാസവും 30 അ. ആഴവുമുള്ള ഒരു കിണർ കുഴിച്ചു് അതിലെ മണ്ണു് പുരയിടത്തിൽ ഒരുപോലെ നിരത്തുകയാണെങ്കിൽ നിരപ്പു് എത്ര ത്തോളം ഉയരും.

19. 24 ഇ. നീളവും 14 ഇ. വ്യാസവുമുള്ള ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ഒരററത്തു് 14 ഇ. വ്യാസത്തിൽ ഒരു അർദ്ധഗോളവും മറേറയററത്തു് 14 ഇ. വ്യാസവും 14 ഇ. പാർശ്വോന്നതിയുമുള്ള ഒരു സൂചീഘാതവും ചേന്ന ഒരു ഘനവസ്തുവിന്റെ ആകെയുള്ള ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവും കാണുക.

20. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം 10% വർദ്ധിപ്പിച്ചാൽ അതിന്റെ ഘനമാനം എത്ര ശതമാനം വർദ്ധിക്കും.

21. 16 അ. വ്യാസമുള്ള ഗോളസ്തംഭത്തിനു മേൽ 16 അ. വ്യാസ മുള്ള ഒരു സൂചീഘാതം ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ആകൃതിയിൽ ഒരു കൂടാരമടി ച്ചിരിക്കുന്നു. കൂടാരത്തിന്റെ ആകെ ഉയരം 18·5 അടിയും ഗോളസ്തംഭ ത്തിന്റെ ഉയരം 12·5 അടിയുമാണു്. കൂടാരത്തിനു് ആവശ്യമുള്ള ക്യാൻവസിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

22. സൂചീസ്തംഭാകൃതിയിൽ കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന ഒരു നെൽക്കൂനയുടെ പാദപരിധി 22 അടിയും പാർശ്വോന്നതി $7\frac{1}{2}$ അടിയുമാകുന്നു. പറയ്ക്കു

3 രൂ. 2 ണ. പ്രകാരം അത്രയും നെല്ലിൻെറ വിലയെന്തു്. (1 പറ = 800 ഘ. ഇ.)

23. ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്മേൽ ഒരു അദ്ധഗോളം ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു നക്ഷത്രബംഗ്ലാവിൻെറ ഏററവും കൂടിയ ഉയരം 80 അടിയും ഏററവും കുറഞ്ഞ ഉയരം 59 അടിയുമാകുന്നു. ബംഗ്ലാവിൻെറ ആകെ വ്യാപ്തവും ചതുരശ്രഅടിക്കു് 1 ണ. 6 പൈ നിരക്കിൽ പുറമെ ചായമിടുന്നതിനുള്ള ചിലവും കാണുക.

24. 4″ വ്യാസവും 4″ പൊക്കവും ഉള്ള ഒരു ചെമ്പു സൂചീഖാതത്തിൻെറയും 4″ വ്യാസമുള്ള ഒരു ചെമ്പുഗോളത്തിൻെറയും ഘനഫലങ്ങൾ കാണുക.

ഈ രണ്ടു ഘനവസ്തുക്കളും ഉരുക്കിക്കിട്ടുന്ന ചെമ്പുകൊണ്ടു 4″ പൊക്കമുള്ള ഒരു ഗോളസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതിൻെറ വ്യാസവും ആകെയുള്ള ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.

അദ്ധ്യായം III

വിദേശനാണയം

വ്യാപാരസംബന്ധമായും മററും അന്യരാജ്യങ്ങളുമായി പണമിടപാടുകൾ നടത്തുന്നതു് അതാതു രാജ്യത്തിലെ നാണയങ്ങളുമായുള്ള കൈമാററനിരക്കിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണു്. ഇംഗ്ലണ്ടിലെ പ്രധാന നാണയം പവൻ ആകുന്നു. ഇതിനു് സ്റ്റേർലിംഗ് എന്നും പേരുണ്ടു്.

12 പെൻസ് = 1 ഷില്ലിംഗ്
20 ഷില്ലിംഗ് = 1 പവൻ.

ഇംഗ്ലൻഡും ഇൻഡ്യയുമായുള്ള കൈമാററനിരക്കു് 1 രൂപയ്ക്കു് 1 ഷി. 6 പെ. ആകുന്നു. ഈ നിരക്കനുസരിച്ചു് ഒരു പവൻ 13 രൂ. 5 ണ. 4 പൈയ്ക്കു തുല്യമായിരിക്കും. എന്നാൽ കമ്പോളനിലവാരമനുസരിച്ചു് കൈമാററനിരക്കു് മേല്പറഞ്ഞതോതിൽ അല്പം കൂടുതലോ കുറവോ ആയേക്കാം.

അമേരിക്കയിലെ പ്രധാന നാണയത്തിന് ഡാളർ എന്നാണു പേർ. ഇതിന്റെ കൈമാററനിരക്ക് 100 ഡാളറിന് 476 രു. 3 ണ. വീതമാണ്. 100 സെൻറ് = 1ഡാളർ. ഇതുപോലെ മററു വിദേശരാജ്യങ്ങളിലെ നാണയങ്ങൾക്കും കൈമാററനിരക്ക നിശ്ചയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഒരു പവന് 13 രു. 6 ണ. വീതമുള്ള നിരക്കിൽ 125 പ. 10 ഷി. ഇംഗ്ലണ്ടിലേക്ക് അയച്ചുകൊടുക്കാൻ എത്ര രുപാ വേണം.

$125\frac{1}{2} \times 13$ രു. 6 ണ. $= 1678$ രു. 9 ണ.

ഒരു രുപയ്ക്ക് 1 ഷി. $5\frac{13}{16}$ പെ. നിരക്കിൽ 95 പവൻ വാങ്ങാൻ എത്ര രുപാ വേണം.

95 പ. $= 95 \times 240$ പെ.

1 രു. $= 17\frac{13}{16}$ പെ.

95 പ. $= \dfrac{95 \times 240}{17\frac{13}{16}} = \dfrac{95 \times 240 \times 16}{285} = 1280$ രു.

ഒരു പവന് 13 രു. 5 ണ. നിരക്കിൽ 355 രു. വാങ്ങണമെങ്കിൽ എത്ര പവൻ വേണം.

1 പവൻ $= 13\frac{5}{16}$ രു.

355 രു. $= 355 \div 13\frac{5}{16} = \dfrac{355 \times 16}{213} = \dfrac{80}{3}$

$= 26$ പ. 13 ഷി. 4 പെ.

ഒരു വ്യാപാരി 175 ഡാളർ വിലയുള്ള സാമാനങ്ങൾ വരുത്തിയതിന് വില കൊടുക്കാൻ എത്ര രുപാ വേണം. 100 ഡാളർ = 478 രു.

175 ഡാളർ $= \dfrac{175 \times 478}{100} = 836$ രു. 8 ണ.

അഭ്യാസം 12

1. കൈമാററനിരക്ക് ഒരു രൂപയ്ക്കു് 1 ഷി. $5\frac{29}{32}$ പെ. ഉള്ളപ്പോൾ 4000 രൂപയ്ക്കു കിട്ടുന്ന സ്റ്റെർലിംഗ് എത്ര.

2. കൈമാററനിരക്ക് രൂപയ്ക്കു് 1 ഷി. $5\frac{15}{16}$ പെ. ആണെങ്കിൽ 358 പ. 15 ഷി. വാങ്ങാൻ എത്ര രൂപാ വേണം.

3. ഒരാൾ രൂപയ്ക്കു് 1 ഷി. $6\frac{1}{16}$ പെ. നിരക്കുവെച്ചു് 11500 രൂപയ്ക്കു് സ്റ്റെർലിംഗ് വാങ്ങി രൂപയ്ക്കു് 1 ഷി. $5\frac{31}{32}$ പെ. വീതം നിരക്കിൽ വിററു. അയാളുടെ ലാഭം എത്ര രൂപാ.

4. കൈമാററനിരക്ക് രൂപയ്ക്കു് 1 ഷി. $6\frac{1}{8}$ പെ. ആയാൽ 152 പ. 5 ഷി. ന് എത്ര രൂപാ കിട്ടും.

5. കൈമാററനിരക്ക് രൂപയ്ക്കു് 1 ഷി. $6\frac{3}{16}$ പെ. ആയാൽ 12000 രൂപ വാങ്ങാൻ സ്റ്റെർലിംഗ് എന്തു കൊടുക്കണം.

6. കൈമാററനിരക്ക് രൂപയ്ക്കു് 1 ഷി. $6\frac{3}{32}$ പെ. ആയിരുന്നപ്പോൾ ഒരാൾ 868 പ. 10 ഷി. ന് ഇൻഡ്യൻ നാണയം വാങ്ങി. നിരക്ക് 1 ഷി. $6\frac{1}{32}$ പെ. ആയപ്പോൾ അതെല്ലാം വിററു. എന്നാൽ അയാൾക്കുള്ള ലാഭനഷ്ടം എത്ര സ്റ്റെർലിംഗ്.

7. അമേരിക്കയുമായുള്ള കൈമാററനിരക്ക് 100 ഡാളറിനു് 482 രു. ആകുന്നു. എന്നാൽ 675 ഡാളർ വാങ്ങുന്നതിനു് എത്ര രൂപാ കൊടുക്കണം.

8. 100 ഡാളറിനു് 480 രു. വീതം നിരക്കുവെച്ചു് 2184 രൂപയ്ക്കു് എത്ര ഡാളർ കിട്ടും.

9. 100 ഡാളറിനു് 475 രു. വീതം നിരക്കുവെച്ചു് 1245 ഡാളറിനു് എത്ര രൂപാ കിട്ടും.

10. 100 ഡാളറിനു് 477 രു. വീതം നിരക്കുവെച്ചു് $4054\frac{1}{2}$ രു. വാങ്ങാൻ എത്ര ഡാളർ കൊടുക്കണം.

11. ലണ്ടനിൽ താമസിക്കുന്ന ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്കു്, പ്രതിമാസം 37 പ. 10. ഷി. ചിലവുണ്ടു്. എന്നാൻ അയാളുടെ ഒരു വർഷത്തെ ചിലവിനു് എത്ര രൂപാ വേണം. 1 രു. = 1 ഷി. 6 പെ.

12. ഒരു പവന് 13 രു. 5 ണ. വീതം നിരക്കവെച്ച് ഒരാൾ 215 പ. വാങ്ങി. നിരക്ക് 13 രു. 6 ണ. 3 പൈ ആയപ്പോൾ അതു വിററു. എന്നാൽ അയാളുടെ ലാഭനഷ്ടം എത്ര രുപാ.

13. സ്റ്റെർലിംഗിൻെറ കൈമാററനിരക്ക് രുപയ്ക്കു് 1 ഷി. $5\frac{1}{4}$ പെ. ആയിരുന്നപ്പോൾ ഒരാൾ $356\frac{1}{2}$ പ. വാങ്ങി നിരക്ക് 1 ഷി. $5\frac{7}{16}$ പെ. ആയപ്പോൾ അതു വിററു. അയാളുടെ ലാഭനഷ്ടം എത്ര രുപാ.

14. ഒരു വ്യാപാരി 7 ഷി. 6 പെ. വീതം വിലയുള്ള 144 പുസ്തകം വരുത്തി. കപ്പൽ ചാർജ്ജ് മുതലായവകയ്ക്കു് 2 പ. 8 ഷി. ചിലവായി. പുസ്തകമൊന്നിനു് ഇൻഡ്യയിൽ 5 രു. 8 ണ. വീതം വിലവെച്ചു വിററാൽ ലാഭനഷ്ടം എന്തു്. 1 പ. = 13 രു. 7 ണ.

15. 100 ഡാളറിനു് 300 രുപാ വീതം നിരക്കണ്ടായിരുന്നപ്പോൾ അമേരിക്കയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു പേനയ്ക്കു് ഇവിടെ 51 രു. വിലകൊടുക്കണം. നിരക്ക് 100 ഡാളറിനു് 475 രുപയായി ഉയന്നതിനു ശേഷം ആ പേനയ്ക്കു് ഇവിടെ എന്തു വിലയായിരിക്കും.

16. കൈമാററനിരക്ക് 1 ഷി. 4 പെ. ആയിരുന്നപ്പോൾ ഇൻഡ്യയിലുള്ള ഒരാൾ 315 പവൻ കടപ്പത്രം നിരപ്പുവിലയ്ക്കു വാങ്ങി. നിരക്ക് 1 ഷി. 6 പെ. ആയപ്പോൾ അതു മുഴുവനും നിരപ്പുവിലയ്ക്കു വിററു എന്നാൽ അയാളുടെ ലാഭനഷ്ടം എന്തു്.

17. കൈമാററനിരക്ക് രുപയ്ക്കു് 1 ഷി. 4 പെ. ആയിരുന്നപ്പോൾ ഒരു ഇംഗ്ലീഷ് കമ്പനി പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തുന്ന ഒരു പുസ്തകത്തിനു് ഇൻഡ്യയിൽ 7 രു. 14 ണ. വിലയുണ്ടായിരുന്നു. നിരക്ക് 1 ഷി. 6 പെ. ആയാൽ ആ പുസ്തകത്തിനു് ഇവിടെ എന്തു വിലയായിരിക്കും.

18. കൈമാററനിരക്ക് രുപയ്ക്കു് 1 ഷി. 6 പെ. ആയിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു ഇംഗ്ലീഷുകുടയ്ക്കു് ഇവിടെ 12 രു. വിലയുണ്ടു്. നിരക്ക് 1 ഷി. 4 പെ. ആക്കിയാൽ അതിൻെറ വിലയെന്താകും.

19. സ്റ്റെർലിംഗിൻെറ കൈമാററനിരക്ക് രുപയ്ക്കു് 1 ഷി. 6 പെ. ആകുന്നു. ഇംഗ്ലണ്ടിലേക്ക് കുരുമുളകു കയററി അയച്ചു വിൽക്കാൻ ഇൻഡ്യയിൽ പറയൊന്നിനു് 16 രു. വീതം വിലവെച്ചു വാങ്ങണം. കൈമാററനിരക്ക് 1 ഷി. 4 പെ. വീതമായി കുറയ്ക്കുകയും എന്നാൽ കുരുമുളകിൻെറ സ്റ്റെർലിംഗ് വില അതേ നിലയ്ക്കുനിൽക്കുകയും ചെയ്താൽ കുരുമുളകിനു് ഇവിടത്തെ വിലയെന്തായിത്തീരും.

20. ഇവിടത്തെ ഒരു പുസ്തകവ്യാപാരി $10\frac{1}{2}$ ഷി. വില കുറിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു പുസ്തകം $16\frac{2}{3}\%$ ഡിസ്കൗണ്ടു കുറച്ച് ഒരു പവന് 13 ക. 8 ണ. വീതം നിരക്കിൽ വിലകൊടുത്തു വരുത്തുന്നു. 90 പുസ്തകം വരുത്തുന്നതിന് 24 ക. 8 ണ. ചിലവായി. ഒരു ഷില്ലിംഗിന് 11 ണ. നിരക്കു വെച്ച് പുസ്തകം മുഴുവനും കുറിച്ചിരിക്കുന്ന വിലയ്ക്കുതന്നെ വിററാൽ അയാളുടെ ലാഭനഷ്ടം എന്ത്.

(S. S. L. C. Questions)

21. 1 ഷില്ലിംഗിന് 11 ണ. വീതം നിരക്കുവെച്ചും 10% ഡിസ്കൗണ്ടു കുറച്ചും ഒരു കടയിൽ പുസ്തകം വിൽക്കുന്നു. മററൊരു കടയിൽ ഒരു ഷില്ലിംഗിന് 12 ണ. വീതം നിരക്കുവെച്ചും 20% ഡിസ്കൗണ്ടുകുറച്ചും അതേ പുസ്തകം വിൽക്കുന്നു. ഏതു കടയിൽനിന്നു വിങ്ങുന്നതാണു ലാഭം.

ഒരു പവൻ വില കുറിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു പുസ്തകത്തിന് രണ്ടു കടയിലും കൊടുക്കേണ്ട വിലയുടെ വ്യത്യാസം എത്ര അണ.

22. ഒരു ക്രുപയ്ക്കു് 1 ഷി. 6 പെ. കൈമാററനിരക്കുള്ളപ്പോൾ ഇൻഡ്യയിൽ ജോലി നോക്കുന്ന ഒരു ഇംഗ്ലീഷുകാരൻ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ താമസിക്കുന്ന ഭാര്യയ്ക്കു് പ്രതിമാസം 800 ക. അയയ്ക്കുന്നു. ഭാര്യയ്ക്കു് ഒരു വർഷത്തിൽ കിട്ടുന്ന സ്റ്റെർലിംഗ് തുകയെന്ത്.

കൈമാററനിരക്ക് 1 ഷി. 4 പെ. ആയാൽ ഭാര്യയ്ക്കു് അതേതുക കിട്ടുന്നതിന് പ്രതിമാസം ഇൻഡ്യയിൽനിന്ന് എന്തു തുക അയയ്ക്കണം.

അദ്ധ്യായം 4

ഓഹരിയും കടപ്പത്രവും

ബാങ്കുകൾ, വ്യവസായങ്ങൾ മുതലായവ സ്ഥാപിച്ചു നടത്തുന്നതിലേക്കു വേണ്ട മൂലധനം ശേഖരിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു സമ്പ്രദായമാണ് ഓഹരിവ്യവസ്ഥ. ഉദാ: ഒരു റബ്ബർകമ്പനി സ്ഥാപിക്കുന്നതിന് $2\frac{1}{2}$ ലക്ഷം രൂപാ മൂലധനം ആവശ്യമാണ്. അതു് 50 രൂപാവീതമുള്ള 5000 ഓഹരികളായി വീതിക്കുകയും അതിൽ

$1\frac{1}{2}$ ലക്ഷം രൂപയ്ക്കുള്ള 3000 ഓഹരികൾ ആദ്യം വിൽക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഓഹരിയൊന്നിനു 30 രൂപാവീതം ആരംഭത്തിൽ പിരിച്ചെടുക്കുകയും ബാക്കിയുള്ള 20 രൂപ പിന്നീട് ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ പിരിച്ചെടുക്കാൻ നിലനിർത്തുകയും ചെയ്യുന്നു.

50 രൂപാവീതമുള്ള 5000 ഓഹരികൾക്കുള്ള $2\frac{1}{2}$ ലക്ഷം രൂപയ്ക്ക് അധികൃതമൂലധനമെന്നും 3000 ഓഹരികൾക്കുള്ള $1\frac{1}{2}$ ലക്ഷം രൂപയ്ക്ക് വിററുകഴിഞ്ഞ മൂലധനമെന്നും അതിൽ 30 രൂപാവീതം കണക്കാക്കിവരുന്ന 90000 രൂപയ്ക്ക് പിരിച്ചെടുത്ത മൂലധനമെന്നും പറയുന്നു. ബാക്കിയുള്ള 20 രൂപാ വീതം കണക്കാക്കിവരുന്ന 60000 രൂപക്ക് നിലനിർത്തിയ മൂലധനമെന്നും നിലനിർത്തിയ ബാദ്ധ്യതയെന്നും പേരുണ്ട്. കമ്പനിയുടെ പ്രവർത്തനത്തിനു കൂടുതൽ പണം ആവശ്യപ്പെട്ടാൽ നിലനിർത്തിയ മൂലധനം പിരിച്ചെടുക്കുകയും പിന്നെയും പണം വേണ്ടിവന്നാൽ വിററിട്ടില്ലാത്ത 2000 ഓഹരികൾകൂടി വിൽക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

കമ്പനിയുടെ പ്രവർത്തനത്തിൽനിന്നുള്ള ആദായം പിരിച്ചെടുത്ത ഓഹരിത്തുകയനുസരിച്ചു വീതിക്കുന്നു. ഓരോ ഓഹരിക്കാരനും ഓഹരിയുടെ എണ്ണമനുസരിച്ചുള്ള ആദായം കിട്ടും. പ്രതിവർഷം 10% ആദായനിരക്കു കൊടുക്കുന്നതായാൽ ഒരു ഓഹരിക്കു കിട്ടുന്ന ആദായവീതം $\frac{10 \times 30}{100} = 3$ രൂപയാണ്. 20 ഓഹരിയുള്ള ഒരാളിന് പ്രതിവർഷം $20 \times 3 = 60$ രൂപാ ആദായം കിട്ടും. ആദായം കണക്കാക്കുന്നതു് പിരിച്ചെടുത്ത ഓഹരിത്തുകയനുസരിച്ചാണ്.

ഓഹരികൾ ക്രയവിക്രയം ചെയ്യാവുന്നവയാണ്. ഓഹരിവില എപ്പോഴും ഓഹരിത്തുകയ്ക്കു തുല്യമായിരിക്കണമെന്നില്ല. നല്ല ആദായം കിട്ടുന്ന കമ്പനികളുടെ ഓഹരിക്കു വില കൂടിയും ആദായം കുറഞ്ഞിരുന്നാൽ ഓഹരിവില കുറഞ്ഞുമിരിക്കും. മേൽപ്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ ഒരു ഓഹരിക്കു് ആദ്യം കൊടുത്ത തുക 30 രൂപ

യാണെങ്കിലും ഒരു ഓഹരിക്കാരൻെറപക്കൽനിന്നും അത്തരം ഒരു ഓഹരി വാങ്ങണമെങ്കിൽ 40 രൂപാ കൊടുക്കണമെങ്കിൽ 30 രൂപയ്ക്കു് ഓഹരിയുടെ മുഖവിലയെന്നും 40 രൂപയ്ക്കു് ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവിലയെന്നും പറയുന്നു. ഒരു ഓഹരിയുടെ മുഖവില യഥാത്ഥത്തിൽ 50 രൂപയാണെങ്കിലും പിരിച്ചെടുത്ത തുകയാണു് മുഖവിലയെന്നു പറയുമ്പോൾ അത്ഥമാക്കേണ്ടതു്. മുഖവിലയും കമ്പോളവിലയും സാധാരണയായി വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കും. കമ്പോളവിലയനുസരിച്ചു് 20 ഓഹരികളുടെ വില $20 \times 40 = 800$ രൂപയാണു്. ഓഹരികളുടെ ക്രയവിക്രയത്തിൽ അവയുടെ എണ്ണം പൂണ്ണസംഖ്യയായിരിക്കും. ഒരു ഓഹരിയുടെ അംശം ക്രയവിക്രയം ചെയ്യുകയില്ല.

കമ്പോളവില കുറിക്കുന്നതിനു് ഒരു പ്രത്യേക രീതിയുണ്ടു്. 30 രൂപാ പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുള്ള 50 രൂപാ ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 40 രൂപയാണെങ്കിൽ അതു് "10 രൂ. ഏററം" അല്ലെങ്കിൽ "10 രൂ. പ്രീമിയം" എന്നും കമ്പോളവില 25 രൂപയാണെങ്കിൽ "5 രൂ. ഇറക്കം" അല്ലെങ്കിൽ "5 രൂ. ഡിസ്കൌണ്ടു്" എന്നും പറയുന്നു. ഏററം 10, ഇറക്കം 5 എന്നു മാത്രം പറഞ്ഞാലും അത്ഥം അതു തന്നെ.

മുഖവിലയും കമ്പോളവിലയും വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുമെങ്കിലും ആദായം കണക്കാക്കുന്നതു മുഖവിലയനുസരിച്ചാണു്. ആദായനിരക്കു് 10% ആണെങ്കിൽ 20 ഓഹരിക്കുള്ള ആദായം $\frac{20 \times 30 \times 10}{100}$ $= 60$ രൂപയാണു്. എന്നാൽ 20 ഓഹരി വാങ്ങുന്നതിനു് 800 രൂ. കൊടുക്കണം. 800 രൂ. മുതൽ മുടക്കിയാൽ 60 രൂ. ആദായം കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ടു മുടക്കിയമുതലിനു കിട്ടുന്ന ആദായനിരക്കു് $\frac{60 \times 100}{800}$ $= 7\frac{1}{2}\%$ മാത്രമാണു്. അതായതു് 10% ആദായനിരക്കു് $7\frac{1}{2}\%$ പലിശനിരക്കിനു തുല്യമാണു്.

ഓഹരികൾ ക്രയവിക്രയംചെയ്യുന്നതു തരകന്മാർ അല്ലെങ്കിൽ ഏജൻറന്മാർ മുഖേനയാണ്. ഓഹരി വിൽക്കണമെന്നുള്ളവരുടെ പക്കൽനിന്ന് അവർ ഓഹരി വാങ്ങുകയും ഓഹരി വാങ്ങണമെന്നുള്ളവക്ക് ഓഹരി വിൽക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇതിലേക്ക് അവക്കു കിട്ടുന്ന ആദായത്തിനു തരക് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ഓഹരിക്കു 2 ണ. വീതം തരകുണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ. ഒരു ഓഹരി വിററാൽ കിട്ടുന്ന 40 രൂപയിൽ 2 ണ. തരകു കൊടുത്തശേഷം 39 രൂ. 14 ണ. യാണു വിററയാളിനു കിട്ടുന്നതു്. ഒരു ഓഹരി വാങ്ങണമെങ്കിൽ അതിനുള്ള വില 40 രൂപയും കൂടാതെ 2 ണ. തരകും കൊടുക്കണം. അതുകൊണ്ടു് ഒരു ഓഹരിയുടെ വാങ്ങിയവില 40 രൂ. 2 ണ.യാണ്.

20 ഓഹരിയുടെ വിററവില $= 20 \times 39$ രൂ. 14 ണ.
$= 797$ രൂ. 8 ണ.

20 ഓഹരിയുടെ വാങ്ങിയവില $= 20 \times 40$ രൂ. 2 ണ.
$= 802$ രൂ. 8 ണ.

20 ഓഹരിയുടെ തരക് ഓരോ ഇടപാടിലും 2 രൂ. 8 ണ. വരും.

തരകു ചിലപ്പോൾ മുഖവിലയുടെയോ കമ്പോളവിലയുടെയോ ശതമാനമായും കണക്കാക്കാവുണ്ടു്. പ്രത്യേകം പറഞ്ഞില്ലെങ്കിൽ മുഖവിലയുടെ ശതമാനമാണെന്നു വിചാരിക്കണം.

ആകെ മുടക്കിയ മുതലിനു കിട്ടുന്ന പലിശനിരക്കു കണക്കാക്കിയാണു പലതരം ഓഹരികൾ താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്നതു്. ഒരു കമ്പനിയിലെ 25 രൂപാ ഓഹരിക്കു് 21 രൂ. കമ്പോളവിലയും 1 ണ. തരകും 4% ആദായനിരക്കും ഉണ്ടു്. മറെറാരു കമ്പനിയിലെ 50 രൂ. ഓഹരിക്കു് 60 രൂ. കമ്പോളവിലയും 2 ണ. തരകും 5% ആദായനിരക്കും ഉണ്ടെങ്കിൽ ഏതു് ഓഹരി വാങ്ങുന്നതാണു് ആദായകരം.

ആദ്യത്തെ ഓഹരിയുടെ വാങ്ങിയവില $= 21\frac{1}{16}$ രൂ.

അതിലുള്ള ആദായം $= \frac{4 \times 25}{100} = 1$ രൂ.

അതിന്റെ തുല്യമായ പലിശനിരക്ക് $= \frac{1}{21\frac{1}{16}} \times 100$

$= 4{\cdot}7\%$

രണ്ടാമത്തെ ഓഹരിയുടെ വാങ്ങിയവില $= 60\frac{1}{8}$ രൂ.

അതിലുള്ള ആദായം $= \frac{5 \times 50}{100} = 2\frac{1}{2}$ രൂ.

അതിന്റെ തുല്യമായ പലിശനിരക്ക് $= \frac{2\frac{1}{2}}{60\frac{1}{8}} \times 100$

$= 4{\cdot}2\%$

ആദ്യത്തെ പലിശനിരക്കു കൂടുതലായതുകൊണ്ട് ആദ്യത്തെ ഓഹരിയാണു കൂടുതൽ ആദായകരം.

ഒരുതരം ഓഹരികൾ വിററു മറെറാരുതരം ഓഹരികൾ വാങ്ങുമ്പോൾ പ്രതിവർഷാദായത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസം കണക്കാക്കാം.

35 രൂ. പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുള്ളതും 6% ആദായമുള്ളതുമായ 50 രൂ. ഓഹരികളിൽ ഒരാൾക്ക് 30 ഓഹരിയുണ്ട്. ഓഹരിയൊന്നിന് 2 ണ. വീതം തരകുകൊടുത്ത് 5 രൂ. 2 ണ. ഏററവിലവെച്ച് അതു മുഴുവനും വിററു. ആ പണംകൊണ്ട് 4% ആദായമുള്ള 100 രൂ. ഓഹരികൾ 4 ണ. വീതം തരകുകൊടുത്ത് 20 രൂ. 4 ണ. ഇറക്കത്തിൽ വെച്ചു വാങ്ങി. എന്നാൽ എത്ര ഓഹരികൾ വാങ്ങി. പ്രതിവർഷാദായത്തിൽ വരുന്ന വ്യത്യാസം എന്ത്.

30 ഓഹരിക്കുള്ള ആദായം $= \frac{6 \times 35 \times 30}{100} = 63$ രൂ.

ഒരു ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില $= 35$ രൂ. $+ 5$ രൂ. 2 ണ.

$= 40$ രൂ. 2 ണ.

ഒരു ഓഹരിയുടെ വിററവില $= 40$ രൂ. 2 ണ. $-$ 2 ണ. $= 40$ രൂ.

30 ഓഹരിയുടെ വിററവില $= 30 \times 40 = 1200$ രൂ.

രണ്ടാമത്തെ ഓഹരിയൊന്നിന്റെ കമ്പോളവില

$= 100$ രൂ. $- 20$ രൂ. 4 ണ. $= 79$ രൂ. 12 ണ.

അതിന്റെ വാങ്ങിയവില $= 79$ രൂ. 12 ണ. $+ 4$ ണ. $= 80$ രൂ.

വാങ്ങിയ ഓഹരിയുടെ എണ്ണം $= 1200 \div 80 = 15$

15 ഓഹരിക്കുള്ള ആദായം $= \frac{4 \times 100 \times 15}{100} = 60$ രു.

ആദായത്തിലുള്ള വ്യത്യാസം $= 63 - 60 = 3$ രു. കുറവ്.

ഒരു കമ്പനിയിൽത്തന്നെ രണ്ടുതരം ഓഹരികൾ ഉണ്ടാകാം. ആദായനിരക്കു മുൻകൂട്ടി നിശ്ചയിച്ചിട്ടുള്ള ഓഹരിക്ക് ക്ലിപ്താദായ ഓഹരി എന്നു പറയുന്നു. അത്തരം ഓഹരികൾക്കുള്ള ആദായം കൊടുത്തുകഴിഞ്ഞു ബാക്കിവരുന്ന ആദായമാണ് സാധാരണ ഓഹരികൾക്കു വീതിക്കാറുള്ളത്.

ഒരു കമ്പനിയുടെ മൂലധനം 5% ക്ലിപ്താദായമുള്ള 50 രു. ഓഹരികൾ 4000 വും ക്ലിപ്താദായമില്ലാത്ത 100 രു. ഓഹരികൾ 5000 വും ചേർന്നുള്ളതാണ്. ഒരു വർഷത്തെ ആദായം 25000 രൂപയാണെങ്കിൽ സാധാരണ ഓഹരികൾക്കുള്ള ആദായനിരക്ക് എന്തായിരിക്കും. 25 ക്ലിപ്താദായ ഓഹരിയും 25 സാധാരണ ഓഹരിയും ഉള്ള ഒരാളിന് പ്രതിവർഷം എന്താദായം കിട്ടും. അതിന്മേൽ രൂപയ്ക്ക് 1 ണ. വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്താൽ ബാക്കി ആദായമെന്ത്.

ആകെ ആദായം $= 25000$ രു.

4000 ക്ലിപ്താദായ ഓഹരിക്കുള്ള ആദായം

$$= \frac{4000 \times 50 \times 5}{100} = 10000 \text{ രു.}$$

ബാക്കി ആദായം $= 15000$ രു.

സാധാരണ ഓഹരിയുടെ ആകെ മൂലധനം

$$= 5000 \times 100 = 500000 \text{ രു.}$$

ആദായനിരക്ക് $= \frac{15000 \times 100}{500000} = 3\%$

25 ഓഹരിയുടെ ക്ലിപ്താദായം $= \frac{25 \times 5 \times 50}{100} = 62\frac{1}{2}$ രു.

25 സാധാരണഓഹരിയുടെ ആദായം $= \frac{25 \times 3 \times 100}{100} = 75$ രു.

ആകെ ആദായം $= 137\frac{1}{2}$ രു.

ആദായനികുതി $= 137\frac{1}{2}$ ണ. $= 8$ രു. 9 ണ. 6 പൈ.

ബാക്കി ആദായം $= 128$ രു. 14 ണ. 6 പൈ.

അഭ്യാസം 13

1. ഒരു ബാങ്കിലെ 50 രൂപാ ഓഹരിക്കു് 59 രൂ. 8 ണ. കമ്പോള വിലയുണ്ടു്. എന്നാൽ 20 ഓഹരി വാങ്ങാൻ എന്തു കൊടുക്കണം.

2. ഒരു നെയ്ത്തുകമ്പനിയിലെ ഓഹരികളുടെ മുഖവില 25 രൂപയും പിരിച്ചെടുത്തതു് 20 രൂപയും കമ്പോളവില 16 രൂ. 8 ണ. യുമാണു്. ഓഹരിയൊന്നിനു 2 ണ. വീതം തരകുണ്ടെങ്കിൽ 40 ഓഹരി വാങ്ങാൻ എന്തു ചിലവാകും.

3. ഒരു വ്യവസായക്കമ്പെനിയിലെ 100 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോള വില 6 രൂ. 8 ണ. ഇറക്കത്തിലാണെങ്കിൽ 10 ഓഹരി വിററാൽ കിട്ടുന്ന തുകയെന്തു്.

4. ഒരു ബാങ്കിലെ 40 രൂ. ഓഹരിയിൽ പിരിച്ചെടുത്തതു് 30 രൂപയാണു്. ഒരു ഓഹരിയുടെ കമ്പോളനിരക്കു് 3 രൂ. 4 ണ. ഇറക്കത്തിൽ നിൽക്കമ്പോഠം ഒരാഠം 50 ഓഹരി വിററു. ഓഹരിയൊന്നിനു് 2 ണ. തരകു കൊടുത്താൽ അയാഠംക്കു് ഈടായ തുകയെന്തു്.

5. ഒരാഠംക്കു് 6% ആദായമുള്ള ഇരുനൂറു 10 രൂപാ ഓഹരിയുണ്ടു്. എന്നാൽ അയാളുടെ പ്രതിവർഷാദായം എന്തു്.

6. ഒരു ബാങ്കിലെ 25 രൂപാ ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 6 രൂ. 4 ണ. ഏററത്തിൽ നിൽക്കമ്പോഠം 1562 രൂ. 8 ണ. യ്ക്കു് എത്ര ഓഹരി വാങ്ങാം. $4\frac{1}{2}$% ആദായവീതം കിട്ടുമെങ്കിൽ പ്രതിവർഷാദായം എന്തു കിട്ടും.

7. 5 രൂപാ വീതം പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുള്ള 10 രൂപാ ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 1 രൂ. ഏററത്തിൽ നിൽക്കമ്പോഠം ഓഹരിയൊന്നിനു് 1 ണ. തരകു കൊടുത്തു് 1212 രൂ. 8 ണ. യ്ക്കു് എത്ര ഓഹരി വാങ്ങാം. 4% ആദായനിരക്കവെച്ചു് പ്രതിവർഷാദായം എന്തു്.

8. 200 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 234 രൂപയാണു്. എത്ര ഓഹരി വിററാൽ 3510 രൂ. കിട്ടും.

9. 75 രൂ. പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുള്ള 100 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോള വില 13 രൂ. 8 ണ. ഇറക്കത്തിൽ നിൽക്കമ്പോഠം എത്ര ഓഹരി വിററാൽ 2450 രൂ. കിട്ടും. ഓഹരിയൊന്നിനു 4 ണ. തരകു്.

10. 7% ആദായനിരക്കുള്ള 25 രൂ. ഓഹരികളിൽനിന്നു് പ്രതിവർഷം 105 രൂ. ആദായം കിട്ടണമെങ്കിൽ എത്ര ഓഹരി വേണം.

11. 10% ആദായനിരക്കുള്ള 250 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 165 രൂ. ഏററത്തിൽ നിൽക്കുന്നു. പ്രതിവർഷം 200 രൂ. ആദായംകിട്ടുന്നതിന്നു് മുടക്കേണ്ട മുതൽ എത്ര.

12. 14% ആദായനിരക്കുള്ള 500 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോള വില 1475 രൂപയും തരകു് 2 രൂപയുമാണു്. എന്നാൽ പ്രതിവർഷം 350 രൂ. ആദായം കിട്ടുന്നതിന്നു മുടക്കേണ്ട മുതൽ എത്ര.

13. ഒരാൾക്കു് 9% ആദായം കിട്ടുന്ന 25 അൻപതു രൂപാ ഓഹരിയുണ്ടു്. രൂപയ്ക്കു് 9 പൈ. വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്താൽ ഒരു വർഷത്തെ ആദായമിച്ചം എന്തു്.

14. ഒരു കമ്പനിയിലെ 50 രൂ. ഓഹരിയിൽ പിരിച്ചെടുത്തതു് 20 രൂപയാണു്. ഒരു ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 42 രൂപയും ആദായം 10% വും തരകു 2 ണ. യുമാണു്. ഒരാൾ 4212 രൂ. 8 ണ. മുടക്കി ഓഹരി വാങ്ങുന്നു. രൂപയ്ക്കു് 1 ണ. വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്താൽ മിച്ചം ഒരു വർഷത്തിൽ കിട്ടുന്ന ആദായം എന്തു്.

15. $3\frac{1}{2}$% ആദായവും രൂപയ്ക്കു് 6 പൈ വീതം ആദായനികുതിയുമുള്ള ഒരു കമ്പനിയിലെ 200 രൂ. ഓഹരികളിൽനിന്നു് ഒരു വർഷം 40 രൂ. 11 ണ. ആദായമിച്ചം കിട്ടണമെങ്കിൽ എത്ര ഓഹരി ഉണ്ടായിരിക്കണം.

16. $2\frac{1}{2}$% ആദായവും രൂപയ്ക്കു് 6 പൈ വീതം ആദായനികുതിയും ഓഹരിയൊന്നിന്നു് 6 രൂ. 8 ണ. കമ്പോളവിലയും 1 ണ. തരകും ഉള്ള 10 രൂ. ഓഹരികളിൽനിന്നു് ഒരു വർഷം 96 രൂ. 14 ണ. ആദായമിച്ചം കിട്ടണമെങ്കിൽ മുടക്കേണ്ട മുതൽ എന്തു്.

17. 5% ആദായമുള്ള 50 രൂ. ഓഹരിക്കു് 54 രൂ. കമ്പോളവിലയുണ്ടെങ്കിൽ മുടക്കുന്ന മുതലിന്നു് എത്ര ശതമാനം പലിശ കിട്ടും.

18. $6\frac{1}{4}$% ആദായമുള്ള 20 രൂ. ഓഹരിക്കു് 22 രൂ. കമ്പോളവിലയും 2 ണ. തരകും ഉണ്ടെങ്കിൽ മുടക്കുന്ന മുതലിന്നു് എത്ര ശതമാനം പലിശ കിട്ടും.

മൂലധനം ശേഖരിക്കുന്നതിനുള്ള മറെറാരു മാർഗ്ഗമാണ് കടപ്പത്രം. ഇതിന് സ്റ്റോക്ക് എന്നും പേരുണ്ട്. ഡിബഞ്ചർ ലോൺ എന്നു പറയുന്നതു് ഒരു പ്രത്യേകതരം കടപ്പത്രമാണ്. കൈവശമുള്ള ആസ്തികൾ ഈടുവെച്ചു് പ്രതിവർഷം ഒരു ക്ലിപ്താദായം കൊടുത്തുകൊള്ളാമെന്നുള്ള കരാറിൽ വാങ്ങുന്ന കടമാണ് കടപ്പത്രം. സാധാരണയായി ഒരു ക്ലിപ്തകാലാവധി കഴിഞ്ഞ് തിരിയെ തന്നുകൊള്ളാമെന്നുംകൂടി കരാറുണ്ടായിരിക്കും. "$3\frac{1}{2}$% ഇൻഡ്യാഗവണ്മെൻറ കടപ്പത്രം, 1960" എന്നു പറഞ്ഞാൽ പ്രതിവർഷം $3\frac{1}{2}$% ആദായംകൊടുത്തു കൊള്ളാമെന്നും 1960-ൽ മുതൽ മുഴുവനും തിരിയെ കൊടുക്കാമെന്നുമുള്ള കരാറിൽ ഇൻഡ്യാഗവണ്മെൻറ വാങ്ങിയിട്ടുള്ള കടം എന്നാണ് അർത്ഥം. കടംവാങ്ങിയതിനുള്ള രേഖയ്ക്കാണു കടപ്പത്രം എന്നു പറയുന്നതു്.

കടപ്പത്രവും ഓഹരികളെപ്പോലെ ക്രയവിക്രയം ചെയ്യാം. ഓഹരികളുടെ മുഖവില പല തുകകളായി വരാം. എന്നാൽ കടപ്പത്രത്തിൻെറ മുഖവില 100-ൻെറ ഗുണിതങ്ങളായേ ഇരിക്കുകയുള്ളു. അതുകൊണ്ടു് കടപ്പത്രങ്ങൾ 100 രൂ. വീതമുള്ള ഓഹരികളായി ഗണിക്കാം. ഈ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് അതിൻെറ കമ്പോളവില കുറിക്കുന്നതും തരകു നിശ്ചയിക്കുന്നതും. "$3\frac{1}{2}$% ഇൻഡ്യാഗവണ്മെൻറ കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളവില 108", എന്നു പറഞ്ഞാൽ 100 രൂ. കടപ്പത്രത്തിൻെ വില 108 രൂപയാണെന്നാണ് അർത്ഥം. ഇതിന് 8 രൂപാ ഏററം എന്നും പറയാം. കമ്പോളവില 100-ൽ കുറഞ്ഞിരുന്നാൽ ഇറക്കം എന്നും പറയണം. "തരകു് $\frac{1}{4}$" എന്നു പറഞ്ഞാൽ 100 രൂ. കടപ്പത്രം വാങ്ങുകയോ വിൽക്കുകയോ ചെയ്യണമെങ്കിൽ $\frac{1}{4}$ രൂ. തരകുകൊടുക്കണമെന്നാണ് അർത്ഥം.

അഭ്യാസം 14

1. ഒരു കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളനിരക്ക് $15\frac{1}{2}$ ഇറക്കത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ 3000 രൂ. കടപ്പത്രം വാങ്ങാൻ എന്തു കൊടുക്കണം.

2. കമ്പോളവില $3\frac{1}{2}$ ഏററത്തിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു കടപ്പത്രം $\frac{1}{8}$ തരകു കൊടുത്തു് 2500 രൂപാപ്പത്രം വാങ്ങാൻ ആകെ എന്തു ചിലവാകും.

3. കമ്പോളനിരക്കു് $89\frac{1}{2}$ വെച്ചു് 2400 രൂ. കടപ്പത്രം വിററാൽ എന്തു തുക കിട്ടും.

4. കമ്പോളനിലവാരം $3\frac{1}{4}$ ഇറക്കത്തിലിരിക്കുമ്പോൾ $\frac{1}{4}$ തരകു കൊടുത്തു് 2100 രൂ. കടപ്പത്രം വിററാൽ കിട്ടുന്ന തുകയെന്തു്.

5. 1600 രൂ. മുഖവിലയുള്ള 3% കടപ്പത്രത്തിൽനിന്നു് ഒരു വർഷത്തിൽ കിട്ടുന്ന ആദായം എന്തു്.

6. 4% കടപ്പത്രത്തിനു് $17\frac{1}{2}$ ഏററവിലയുള്ളപ്പോൾ 2350 രൂപയ്ക്കു എത്രരൂപാപ്പത്രം വാങ്ങാം. അതിൽനിന്നുള്ള പ്രതിവർഷാദായം എന്തു്.

7. 3% കടപ്പത്രത്തിനു $98\frac{1}{4}$ കമ്പോളവിലയും $\frac{1}{8}$ തരകും ഉണ്ടെങ്കിൽ 3935 രൂപയ്ക്കു് എത്ര രൂപാ കടപ്പത്രം വാങ്ങാം. അതിൽനിന്നുള്ള പ്രതിവർഷാദായം എന്തു്.

8. ഒരു കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളനിരക്കു് $123\frac{1}{8}$ ആണെങ്കിൽ എത്രരൂപാപ്പത്രം വിററാൽ 1970 രൂ. കിട്ടും.

9. ഒരു കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളനിരക്കു് $107\frac{1}{2}$ യും തരകു് $\frac{1}{8}$-ം ആണെങ്കിൽ 1288 രൂ. 8 ണ. കിട്ടുന്നതിനു് എത്രരൂപാപ്പത്രം വിൽക്കണം.

10. $3\frac{1}{2}$% കടപ്പത്രത്തിൽനിന്നു് പ്രതിവർഷം 63 രൂ. ആദായം കിട്ടണമെങ്കിൽ എത്രരൂപാപ്പത്രം വേണം.

11. 3% കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളവില $7\frac{1}{2}$ ഇറക്കത്തിൽ നിൽക്കുന്നു. പ്രതിവർഷം 105 രൂ. ആദായം കിട്ടുന്നതിനു മുടക്കേണ്ട മുതൽ എന്തു്.

12. $3\frac{1}{4}$% കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളവില $94\frac{1}{8}$ ആണു്. $\frac{1}{8}$ തരകു കൊടുക്കണം. എന്നാൽ പ്രതിവർഷം 104 രൂ. ആദായം കിട്ടുന്നതിനു് മുടക്കേണ്ട മുതൽ എത്ര.

13. $2\frac{1}{2}$% കടപ്പത്രത്തിൽനിന്നുള്ള ആദായത്തിന്മേൽ രൂപയ്ക്കു് 6 പൈ വീതം ആദായനികുതി ചുമത്തുന്നു. എന്നാൽ 3600 രൂപാപ്പത്രത്തിൽനിന്നു് ഒരു വർഷത്തിൽ കിട്ടുന്ന ആദായമിച്ചം എന്തു്.

14. $2\frac{3}{4}\%$ കടപ്പത്രത്തിന്റെ കമ്പോളവില $76\frac{3}{4}$ ആണു്. ഒരാം $\frac{1}{8}$ തരകുകൊടുത്തു് 2460 രൂപയ്ക്കു കടപ്പത്രം വാങ്ങുന്നു. രൂപയ്ക്കു് 9 പൈ വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്തുകഴിഞ്ഞു് ബാക്കി പ്രതിവർഷാദായം എന്തു്.

15. $4\frac{1}{2}\%$ കടപ്പത്രത്തിൽനിന്നുള്ള ആദായത്തിന്മേൽ രൂപയ്ക്കു് 1 ണ. വീതം നികുതിയുണ്ടു്. പ്രതിവർഷം 50 രൂ. 10 ണ. മിച്ചം ആദായം കിട്ടണമെങ്കിൽ എത്രരൂപാപ്പത്രം ഉണ്ടായിരിക്കണം.

16. $3\frac{1}{2}\%$ കടപ്പത്രത്തിന്റെ കമ്പോളവില 105 ആണു്. $\frac{1}{8}$ തരകും കൊടുക്കണം. ആദായത്തിന്മേൽ രൂപയ്ക്കു് 6 പൈ വീതം നികുതി കൊടുത്തു് ബാക്കി പ്രതിവർഷം 47 രൂ. 7 ണ. 6 പൈ ആദായം കിട്ടണമെങ്കിൽ മുടക്കേണ്ട മുതൽ എന്തു്.

17. $3\frac{1}{2}\%$ കടപ്പത്രത്തിന്റെ കമ്പോളവില $104\frac{1}{2}$ ആണെങ്കിൽ മുടക്കുന്ന മുതലിനു് എന്തു പലിശനിരക്ക കിട്ടും.

18. 4% കടപ്പത്രത്തിനു് $107\frac{1}{2}$ കമ്പോളവിലയും $\frac{1}{8}$ തരകും ഉണ്ടെങ്കിൽ മുടക്കുന്ന മുതലിനു് എത്ര ശതമാനം പലിശ കിട്ടും.

അഭ്യാസം 15

1. 14% ആദായം കിട്ടുന്ന ഇമ്പീരിയൽബാങ്കിലെ 500 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 1437 രൂപയും തരകു് 1 രൂ. 8 ണ. യുമാണു്. എന്നാൽ 12 ഓഹരി വാങ്ങുന്നതിനു് ആകെ എന്തു ചിലവാകും. ആകെ പ്രതിവർഷം എന്താദായം കിട്ടും. മുടക്കിയ മുതലിനു് എത്ര ശതമാനം ആദായം കിട്ടും.

2. 7% ആദായം കിട്ടുന്നതും 10 രൂ. പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുള്ളതുമായ ഒരു തേയിലക്കമ്പെനിയിലെ 20 രൂ. ഓഹരിക്കു് 4 രൂ. 6 ണ. ഏററ വിലയും 6 പൈ തരകും ഉണ്ടു്. 1844 രൂപയ്ക്കു് എത്ര ഓഹരി വാങ്ങാം. അതിൽനിന്നു പ്രതിവർഷം കിട്ടുന്ന ആദായമെന്തു്. ആദായത്തിനു തുല്യമായ പലിശനിരക്കു് എത്ര ശതമാനം.

3. $3\frac{1}{2}\%$ ഇൻഡ്യാഗവമ്മെൻറ കടപ്പത്രത്തിന്റെ കമ്പോളനിരക്കു് $106\frac{1}{4}$ ആകുന്നു. $\frac{1}{8}$ തരക കൊടുത്തു് 4000 രൂപാ കടപ്പത്രം വാങ്ങുന്ന

തിന്നു് എന്തു ചിലവാകും. അതിലുള്ള പ്രതിവർഷാദായമെന്തു്. ആദായം മുടക്കമുതലിന്നു് എത്ര ശതമാനം.

4. 9% ആദായം കിട്ടുന്ന ഒരു ബാങ്കിലെ 50 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളനിരക്കു് 67 രൂ. 8 ണ. യും തരകു് 1 ണ. യുമാകുന്നു. 25 ഓഹരികൾ വിററാൽ കിട്ടുന്ന തുകയെന്തു്.

5. 4% കടപ്പത്രത്തിന്റെ കമ്പോളനിരക്കു് $125\frac{3}{4}$ ആണെങ്കിൽ 3000 രൂപാപ്പത്രം വിററാൽ എന്തു കിട്ടും. തരകു് = $\frac{1}{8}$.

6. 8% ആദായം കിട്ടുന്ന ഒരു നെയ്ത്തു കമ്പനിയിലെ 25 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളനിരക്കു് 31 രൂ. 4 ണ. ആയിരുന്നപ്പോൾ ഒരാൾ 50 ഓഹരി വാങ്ങി. കമ്പോളനിരക്ക 33 രൂ. 2 ണ. ആയപ്പോൾ അതെല്ലാം വിററു. ഓരോ ഇടപാടിലും 6 പൈ തരകുകൊടുത്താൽ അയാൾക്കു കിട്ടിയ ലാഭം എന്തു്.

7. ഒരാൾ $3442\frac{1}{2}$ രൂ. മുടക്കി $4\frac{1}{2}$ ഇറക്കവിലയ്ക്കു $\frac{1}{8}$ തരകു കൊടുത്തു് 3% കടപ്പത്രം വാങ്ങി. നിരക്കു് $1\frac{3}{4}$ ഏററമായപ്പോൾ $\frac{1}{4}$ തരകു കൊടുത്തു് അതു മുഴുവൻ വിററു. എന്നാൽ അയാളുടെ ലാഭമെന്തു്.

8. $4\frac{1}{2}$% ആദായം കിട്ടുന്ന ഒരു കമ്പനിയിലെ 5 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 8 ണ. ഇറക്കത്തിലിരിക്കുമ്പോൾ ഒരാൾ 1350 രൂപയ്ക്കു് ഓഹരി വാങ്ങി. ആറു മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ഒരു അദ്ധ്വർഷത്തെ ആദായം പററിക്കൊണ്ടു് 4 ണ. ഏററനിരക്കിന്നു് ഓഹരി മുഴുവനും വിററു. എന്നാൽ അയാൾക്കു കിട്ടിയ ലാഭം എന്തു്. ഇതു് മുടക്കിയ മുതലിന്നു് എത്ര ശതമാനമാകും.

9. 5% കടപ്പത്രത്തിന്നു് $109\frac{1}{4}$ കമ്പോളവിലയും $\frac{1}{8}$ തരകും ഉണ്ടു്. 2619 രൂ. കിട്ടണമെങ്കിൽ എത്രരൂപാപ്പത്രം വിൽക്കണം.

10. ഒരാൾക്കു 12% ആദായം കിട്ടുന്ന ഒരു കമ്പനിയിൽ എഴുന്തറു് 50 രൂ. ഓഹരിയുണ്ടു്. അതിന്റെ കമ്പോളനിരക്കു് $47\frac{1}{2}$ രൂ. ഏററത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ അവയെല്ലാം വിററു് $5\frac{1}{4}$% കടപ്പത്രം 9 രൂ. ഇറക്കത്തിൽ വാങ്ങി. എന്നാൽ അയാളുടെ പ്രതിവർഷാദായത്തിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്തു്.

11. $3\frac{3}{4}$% കടപ്പത്രം $96\frac{1}{2}$ ൽ നിൽക്കുമ്പോൾ ഒരാൾ $\frac{1}{8}$ തരകു കൊടുത്തു് 6184 രൂപയ്ക്കു കടപ്പത്രം വാങ്ങി. രൂപയ്ക്കു് 9 പൈ വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്താൽ മിച്ചം ഒരു വർഷത്തെ ആദായം എന്തു്.

12. ഒരാറം പ്രതിവഷം 4% പലിശയ്ക്കു് ഒരു ബാങ്കിൽ 3100 രൂ. നിക്ഷേപിച്ചിട്ടുണ്ടു്. ആ പണം എടുത്തു് $3\frac{1}{2}$% കടപ്പത്രം $3\frac{1}{4}$ ഇറക്ക വിലയ്ക്കു് $\frac{1}{8}$ തരകുകൊടുത്തു വാങ്ങിയാൽ പ്രതിവർഷമുള്ള ആദായത്തിൽ എന്തു വ്യത്യാസമുണ്ടാകും.

അഭ്യാസം 16

(S. S. L. C. Questions)

1. ഒരാറം 2175 പവനു് $108\frac{5}{8}$ നിരക്കിൽ 6% കടപ്പത്രം വാങ്ങിയാൽ അതിൻെറ മുഖവിലയെന്തു്. പവൻ ഒന്നിനു് 8 പൈ വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്തശേഷം ഒരു വഷത്തെ ആദായമിച്ചം എന്തു്. മുടക്കിയ മുതലിനു് ഇതു് എത്ര ശതമാനം പലിശനിരക്കിനു തുല്യമാകും. തരകു് $\frac{1}{8}$.

2. ഒരാറം $3\frac{1}{2}$% 5000 രൂപാ കടപ്പത്രം $91\frac{1}{8}$ വിലവെച്ചു് $\frac{1}{8}$ തരകു കൊടുത്തു വിററു. ആ പണംകൊണ്ടു് $4\frac{1}{2}$% കടപ്പത്രം $103\frac{3}{4}$ വിലവെച്ച $\frac{1}{4}$ തരകുകൊടുത്തു വാങ്ങി. രണ്ടാമത്തെ കടപ്പത്രത്തിലെ ആദായത്തിൽ രൂപയ്ക്കു് 8 പൈ വീതം നികുതി കൊടുക്കണമെങ്കിൽ പ്രതിവഷാദായത്തിൽ ഉണ്ടായ വ്യത്യാസമെന്തു്.

3. 15 രൂ. പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുള്ള 20 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോള വില $2\frac{1}{2}$ രൂ. ഏററത്തിൽ നിൽക്കുന്നു. ഓഹരിയൊന്നിനു് 4 ണ. തരകു കൊടുക്കണം. എന്നാൽ 710 രൂപയ്ക്കു് എത്ര ഓഹരി വാങ്ങാം.

4. ഒരാറം 4200 രൂ. മുടക്കി $3\frac{1}{2}$% കടപ്പത്രം $104\frac{3}{4}$ നിരക്കിൽ വാങ്ങി. ഒരു അദ്ധവഷത്തെ ആദായം പററിക്കൊണ്ടു് $108\frac{1}{4}$ നിരക്കിൽ വിററു. തരകു $\frac{1}{4}$ ആണെങ്കിൽ അയാളുടെ ലാഭമെന്തു്.

5. 4% കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളനിരക്കു് $140\frac{3}{4}$ ആണു്. രൂപയ്ക്കു 4 പൈ വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്തശേഷം പ്രതിവഷം 400 രൂ. ആദായമിച്ചം കിട്ടുന്നതിനു് എത്ര രൂ. മുടക്കി കടപ്പത്രം വാങ്ങണം. തരകു് $\frac{1}{4}$.

6. ഒരു കമ്പനിയുടെ 150 രൂ. ഓഹരിയിൽ 90 രൂ. മാത്രം പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുണ്ടു്. അതിൻെറ കമ്പോളവില 175 രൂപയാണു്. പ്രതിവർഷാദായം 8% ആണെങ്കിൽ 3500 രൂ. മുടക്കിയാൽ എന്താദായം കിട്ടും.

7. 6% ലാഭവീതം നൽകുന്ന ഒരു ബാങ്കിലെ 500 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 1970 രൂപയാണ്. പ്രതിവർഷം 250 രൂപയിൽ കുറയാതെ ആദായം കിട്ടുന്നതിന് എത്ര രൂപാ മുടക്കി ഓഹരി വാങ്ങണം.

8. ഒരാൾ ഒരു കടപ്പത്രം $94\frac{3}{8}$ വീതം വിലയ്ക്കു വാങ്ങി 100 വീതം വിലയ്ക്കു വിററു. അയാൾക്ക് 537 രൂ. 8 ണ. ലാഭം കിട്ടുന്നെങ്കിൽ എത്ര രൂപാപ്പത്രം വാങ്ങി വിററിരിക്കണം. അതിലേക്കു മുടക്കിയ മുതൽ എന്ത്. മുടക്കിയ മുതലിന് എത്ര ശതമാനം ലാഭം കിട്ടി. തരക് $\frac{1}{8}$.

9. ഒരു കമ്പനിയുടെ മൂലധനം 5% ആദായവും 100 രൂ. മുഖവിലയുമുള്ള 1200 ക്ലിപ്തദായ ഓഹരിയും 10 രൂ. മുഖവിലയുള്ള 10000 സാധാരണ ഓഹരിയും ചേർന്നതാണ്. ഒരു വർഷത്തെ ആകെ ആദായം 10500 രൂപയാണ്. എന്നാൽ 50 ക്ലിപ്തദായ ഓഹരിയും 125 സാധാരണ ഓഹരിയും ഉള്ള ഒരാളിന് പ്രതിവർഷം എന്താദായം കിട്ടും.

10. കമ്പോളനിരക്ക് 90 ൽ നിൽക്കുന്ന 4% കടപ്പത്രം വാങ്ങാൻ ഒരാൾ 600 രൂപയും കമ്പോളനിരക്ക് 120 ൽ നിൽക്കുന്ന 5% കടപ്പത്രം വാങ്ങാൻ മററൊരു തുകയും മുടക്കുന്നു. രണ്ടു തുകയും ഒന്നിച്ച് $4\frac{1}{2}$% കടപ്പത്രം 105 വീതം നിരക്കുവെച്ചു വാങ്ങാൻ ചിലവാക്കിയിരുന്നെങ്കിൽ കിട്ടുമായിരുന്ന ആദായം മററു രണ്ടു കടപ്പത്രങ്ങളിൽനിന്നു കിട്ടണമെങ്കിൽ 5% കടപ്പത്രം വാങ്ങാൻ എത്ര രൂപ മുടക്കണം.

11. 30 രൂ. വീതം പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുള്ള 50 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 55 രൂപയാണ്. 75 ഓഹരി വാങ്ങാൻ എന്തു കൊടുക്കണം. 6% ആദായവീതം കൊടുക്കുന്നതായാൽ ഒരാണ്ടത്തെ ആദായമെന്ത്.

12. ഒരാൾ 5% ആദായമുള്ള കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളനിരക്ക് $105\frac{1}{4}$ ൽ നിൽക്കുമ്പോൾ 6000 രൂപാപ്പത്രം വിററ് ആ പണംകൊണ്ട് കമ്പോളനിരക്കു $119\frac{3}{4}$ ൽ നിൽക്കുന്ന 6% കടപ്പത്രം വാങ്ങുന്നു. രണ്ടാമത്തെ കടപ്പത്രത്തിൻെറ മുഖവിലയെന്ത്. അയാളുടെ പ്രതിവർഷാദായത്തിലുള്ള വ്യത്യാസമെന്ത്. തരക് $\frac{1}{4}$.

13. ഒരാൾ 112 രൂ. 6 ണ. കമ്പോളനിരക്കുള്ള 6% കടപ്പത്രം 4200 രൂപയ്ക്കു വാങ്ങുന്നു. (തരക് $\frac{1}{8}$). മുടക്കിയ മുതലിന് എന്തു പലിശനിരക്കു കിട്ടും. രൂപയ്ക്ക് 7 പൈ വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്തുകഴിഞ്ഞ് മിച്ചം ആദായം എന്ത്.

14. നെല്ലിയാംപതി തേയിലത്തോട്ടം ഓഹരിയുടെ മുഖവില 2 രൂപയും കമ്പോളവില 1 രൂ. 14 ണ. യും ആണ്. മിഡ്ലാൻഡ് റബ്ബർ തോട്ടം ഓഹരിയുടെ മുഖവില 10 രൂപയും കമ്പോളവില 11 രൂ. 8 ണ. യും ആണ്. ഒരാൾ 400 തേയിലത്തോട്ടം ഓഹരിയും 200 റബ്ബർതോട്ടം ഓഹരിയും വിററ് ആ പണംകൊണ്ട് അലുമിനിയം ഇൻഡസ്ട്രീസിലെ 10 രൂ. ഓഹരികൾ 15 രൂ. 4 ണ. വീതം വിലയ്ക്കു വാങ്ങി. എത്ര ഓഹരി വാങ്ങി.

15. താഴെ കാണുന്നവയിൽ ഏതാണു കൂടുതൽ ആദായകരം.

i. കമ്പോളവില 85 ൽ നിൽക്കുന്ന $4\frac{1}{2}\%$ കടപ്പത്രം

ii. കമ്പോളവില 105 ൽ നിൽക്കുന്ന 6% കടപ്പത്രം

ഒരാൾ ആദ്യത്തെ കടപ്പത്രത്തിൽ 2100 രൂപാപ്പത്രം വിററ് രണ്ടാമത്തെ കടപ്പത്രം വാങ്ങുന്നു. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ കടപ്പത്രം എത്ര വാങ്ങി. പ്രതിവർഷാദായത്തിലുള്ള വ്യത്യാസമെന്ത്.

16. 6% ആദായമുള്ള ഒരു റബ്ബർകമ്പനിയിലെ 50 രൂ. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളനിരക്ക് 5 രൂ. ഏററത്തിൽ നിൽക്കുന്നു. ഒരാൾ 20 ഓഹരി വിററ് ആ പണം കൊണ്ട് കമ്പോളനിരക്ക് 120 ൽ നിൽക്കുന്ന $7\frac{1}{2}\%$ കടപ്പത്രം വാങ്ങുന്നു. എന്നാൽ പ്രതിവർഷാദായത്തിലുണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസമെന്ത്. പ്രസ്തുത കടപ്പത്രത്തിൽ മുടക്കിയ മുതലിനു് എത്ര ശതമാനം ആദായം കിട്ടുന്നു.

17. താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതാണു കൂടുതൽ ആദായകരം.

i. 80 ൽ നിൽക്കുന്ന 5% കടപ്പത്രം

ii. 5% ആദായമുള്ളതും $2\frac{1}{2}$ രൂ. ഏററത്തിൽ നിൽക്കുന്നതും 20 രൂ. പിരിച്ചെടുത്തിട്ടുള്ളതും ആയ 25 രൂ. ഓഹരികൾ.

18. ഒരാൾ $115\frac{1}{4}$ ൽ നിൽക്കുന്ന $3\frac{1}{2}\%$ കടപ്പത്രം വാങ്ങാൻ 6930 രൂ. മുടക്കുന്നു. (തരകു് $\frac{1}{4}$). എത്ര രൂപാപ്പത്രം വാങ്ങുന്നു. രൂപയ്ക്കു് 4 പൈ വീതം ആദായനികുതി കൊടുത്തുകഴിഞ്ഞു് ഒരു വർഷത്തെ ആദായമിച്ചം എന്തു്.

അദ്ധ്യായം V

ബീജഗണിതം : പ്രാരംഭം.

ബീജഗണിതത്തിൽ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ബീജങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ബീജങ്ങളും ക്രിയാചിഹ്നങ്ങളും ചേരുമ്പോൾ രാശികളും രാശിമാലകളും ഉണ്ടാകുന്നു. ബീജങ്ങൾക്കു പകരം ഓരോ സംഖ്യ അർത്ഥം കല്പിച്ചു ക്രിയ ചെയ്താൽ രാശിയുടെയും രാശിമാലയുടെയും അർത്ഥം കണക്കാക്കാം. ഇങ്ങനെ രാശികളും രാശിമാലകളും ക്രിയാഫലങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളായതുകൊണ്ടു് അവയ്ക്കു പകരം ഒരു ബീജം കല്പിക്കാവുന്നതാണു്.

ഉദാ: $a + b = x, \qquad a - b = y.$

ഒരു നിർദ്ദിഷ്ടഫലം കാണുന്നതിനുള്ള വഴി രാശിമാലയുടെ രൂപത്തിൽ കുറിക്കുന്നതാണു് സൂത്രവാക്യം. അതിൽ ബീജാർത്ഥങ്ങളെല്ലാം വിശേഷസംഖ്യകളായിരിക്കും.

പ്രമാണരൂപത്തിൽ ക്രിയാഫലങ്ങൾ കുറിക്കുന്നതാണു് ബീജവാക്യം. ഉദാ: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. ഇതിൽ ബീജാർത്ഥം എത്രയായിരുന്നാലും രണ്ടു രാശിമാലകളുടെയും അർത്ഥസംഖ്യ തുല്യമായിരിക്കും.

ഒരു രാശിമാലയുടെ അർത്ഥസംഖ്യ ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തിയാൽ സമവാക്യം കിട്ടുന്നു. അതു് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ ബീജാർത്ഥവും കിട്ടും. സമവാക്യത്തിന്റെ രൂപഭേദമനുസരിച്ചു് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള ക്രിയകളും വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കും.

ഒരു ബീജം മാത്രമുള്ളതും അതിന്റെ വർഗ്ഗമോ അതിൽകൂടിയ ഡിഗ്രിയോ വരാത്തതുമായ സമവാക്യത്തിനു് ആദിസമവാക്യം എന്നു പേർ.

ഉദാ: $\frac{x+2}{5} - 1 = \frac{3x-4}{2} + 4.$

ഛേദങ്ങളുടെ ലഘുഗുണിതംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു് രാശികളെ ഇടംവലം നീക്കി ചുരുക്കിയെഴുതിയാൽ ആദിസമവാക്യത്തിൻെറ മാതൃകാരൂപം കിട്ടും.

ഉദാ: $-3x = 26. \quad \therefore x = \frac{26}{-3} = -8\frac{2}{3}.$

രണ്ടു ബീജമുള്ളതും അവയുടെ വർഗ്ഗമോ അതിൽകൂടിയ ഡിഗ്രിയോ വരാത്തതുമായ സമവാക്യത്തിനു് ബീജദ്വയസമവാക്യം എന്നു പേർ. ഉദാ: $5x - 2y = 1.$ രണ്ടു ബീജദ്വയസമവാക്യങ്ങളിൽ ഒന്നിലെ ബീജാർത്ഥം തന്നെ മറേറതിലും ബീജാർത്ഥമായി വന്നാൽ അവയ്ക്കു് അന്യോന്യസമവാക്യം എന്നു പേർ. ഏതെങ്കിലും ഒരു ബീജത്തിൻെറ ഗുണകം രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിലും ഒരുപോലെയാക്കി കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ ആദിസമവാക്യം കിട്ടും.

ഉദാ:
$$\begin{aligned} 4x+3y &= 11; & \therefore\ 12x+9y &= 33 \\ 3x-4y &= 2; & \therefore\ 12x-16y &= 8 \\ 25y &= 25; & \therefore\ y &= 1 \\ 4x+3 &= 11; & \therefore\ x &= 2. \end{aligned}$$

പല യുക്തിച്ചോദ്യങ്ങളിലും സമവാക്യം നിർമ്മിച്ചു് ഉത്തരം കണ്ടു പിടിക്കാവുന്നതാണു്. ചോദ്യത്തിൽ തന്നിട്ടില്ലാത്ത സംഖ്യയ്ക്കു പകരം ബീജം കൽപിച്ചാൽ സമവാക്യം നിർമ്മിക്കാം.

അഭ്യാസം 17

(S. S. L. C. Questions)

1. $x^2-2(x-1)$, $x+2(x^2-2)$ ഇവ രണ്ടുംകൂടി കൂട്ടി കിട്ടുന്ന തുകയെ $4x^2-(x-3)$ ൽനിന്നു കുറയ്ക്കുക.

2. $a^3-5a(a-1)-1$, ഇതിനോടു് എന്തു കൂട്ടിയാൽ $a^3+5a(a+1)+1$ കിട്ടും.

3. $3x-5y+2z$, $3y-5z-2x$ ഇവയുടെ തുകയോടു് എന്തു കൂട്ടിയാൽ $3z+5x-2y$ കിട്ടും.

4. $a=2$, $b=a+2$, $c=a-2$ ആയാൽ $\frac{2a-b}{a+b}+\frac{2b-c}{b+c}+\frac{2c-a}{c+a}$ എത്ര.

5. $3y=-2x$ ആയാൽ $\frac{8x+19y}{5y-6x}$ എത്ര.

6. 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെയുള്ള സമ്പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ തുക $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ ആകുന്നു. എന്നാൽ 20 പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ തുകയെന്തു്.

7. $a=1, b=2, c=-3$ ആയാൽ $a^3+b^3+c^3-3abc$ എത്ര.

8. $a=1, b=2, c=-3$ ആയാൽ $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ എത്ര.

9. $\frac{a}{b}=2$ ആയാൽ $\frac{a+b}{a}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a-b}{a}$, $\frac{a-b}{a+b}$ ഇവ ഓരോന്നും എത്ര.

വലയം നീക്കി ക്രിയാഫലം കാണുക.

10. $2x^2-[(3+2x)(x-4)]$. $x=-2{\cdot}5$ ആയാൽ ഫലം എത്ര.

11. $4y-[3x-(-2y-\overline{x-y})]$. $x=2$, $y=-3$ ആയാൽ ഫലം എത്ര.

12. $a-(b-c)-[a-b-c-2(b+c)]$

13. $\frac{a}{6}-\frac{b}{2}-\left[\frac{2b-4a}{6}+\left(3b-\frac{4a+b}{3}\right)-b+\frac{a-3b}{6}\right]$

14. $v=12t$; $s=6t^2$. ഈ സൂത്രവാക്യങ്ങളിൽ v യുടെ ബീജാർത്ഥത്തിൽനിന്നു് s കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം നിർമ്മിക്കുക. $s=294$ ആയാൽ v എത്ര.

15. P രൂപയ്ക്കു് പ്രതിവർഷം r ശതമാനം പലിശനിരക്കവെച്ചു് 2 വർഷത്തേക്കുള്ള സാധാരണ പലിശയും ക്രൂട്ടപലിശയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം നിർമ്മിക്കുക.

16. a ഇഞ്ചും b ഇഞ്ചും വ്യാസമുള്ള രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ ആകെ വ്യാപ്തത്തിനു തുല്യമായ വ്യാപ്തമുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം c ഇഞ്ചാണു്. a, b, c ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം നിർമ്മിക്കുക.

17. $P=\frac{W}{7\cdot5}+1\cdot5$; $E=\frac{W}{8P}$: ഇവ രണ്ടു സൂത്രവാക്യങ്ങളാണു്. P ൽനിന്നു് E കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം നിർമ്മിക്കുക.

18. $H=V\left(\frac{T_1-T_2}{550}\right)$ ഈ സൂത്രവാക്യത്തെ രൂപാന്തരപ്പെടുത്തി V കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യമാക്കുക.

19. $A=2h(l+b)$. ഈ സൂത്രവാക്യത്തെ രൂപാന്തരപ്പെടുത്തി b കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യമാക്കുക.

20. $y=\frac{ax+1}{x-a}$ ആയാൽ $x=\frac{ay+1}{y-a}$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

21. $a+b=x$, $ab=y$; എന്നാൽ a^2+b^2 നു തുല്യമായി x, y മാത്രം വരുന്ന രാശിമാല കാണുക.

22. $x+\frac{1}{x}=2$; എന്നാൽ $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

23. $x+y$, $x-y$ ഇവയെ ഓരോ ബീജങ്ങളായി സങ്കല്പിച്ച് x^2+y^2 ക്രിയാഫലം വരത്തക്കവണ്ണം ഒരു രാശിമാല നിർമ്മിക്കുക.

24. $x+\frac{1}{x}$ നെ ഒരു ബീജമായി സങ്കല്പിച്ച് $x^2+\frac{1}{x^2}$ ക്രിയാഫലം വരുന്ന രാശിമാല നിർമ്മിക്കുക.

അഭ്യാസം 18

(S. S. L. C. Questions)

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

1. $\frac{x-3}{5}-\frac{5x+1}{3}+\frac{3-x}{10}=\frac{14}{15}$

2. $\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}=\frac{x-1}{2}-6$

3. $\frac{x-4}{3}+(x-1)(x-2)=x^2-2x+4$

4. $(x-3)(x-5)+1=(x+1)(x-2)+4$

5. $\frac{5}{7}(2x-11)-\frac{3}{4}(x-5)=\frac{x}{3}-(10-x)$

6. $\frac{x+7}{5}-\frac{2x+3}{11}=\frac{8x-1}{2}$

7. $x=5c-7$, $y=17-3c$. $x=y$ ആയാൽ c എത്ര.

8. $10x+11y=113$, $11x+10y=118$

9. $9x+14y=4$, $14x+9y=19$

10. $x+3y = 4$
$y-3x-18 = 0$

11. $2x-5y = 4$
$3x-7y = 5$
$x+cy = -10$ ആയാൽ c എത്ര.

12. $4x-7y = 6$
$2x+3y = 16$

13. $3x+5y = 31$
$5x+3y = 25$

14. $4x = 3y+23$
$4y = 3x-5$

15. $73x-37y = 109$
$37x-73y = 1$
x^2+y^2 എത്ര. x^2-y^2 എത്ര.

16. $x = y$
$7x-3y = 4$
$5x^2-3y$ എത്ര

17. $\cdot 3x - \cdot 2y = -4$
$\cdot 2x + \cdot 3y = 14$

18. $x+y-\frac{1}{2}(x-y) = 11$
$x-y+\frac{1}{3}(x+y) = 6$

19. $2x+7y = \cdot 8$
$x+5y = \cdot 5$

20. ഒരു ജന്മിക്കു നിലവും പുരയിടവും കൂടി കുറെ സ്വത്തുണ്ടു്. നിലത്തിനു് ആണ്ടിൽ ഏക്കറൊന്നിനു 120 രൂ. വീതവും പുരയിടത്തിനു് ആണ്ടിൽ ഏക്കറൊന്നിനു 80 രൂ. വീതവുംവെച്ചു പാട്ടത്തിനു കൊടുത്തപ്പോൾ വഷത്തിൽ പാട്ടഇനത്തിൽ ആകെ 3800 രൂ. കിട്ടി. പാട്ടനിരക്കു് നിലത്തിനു് ഏക്കറൊന്നിനു് 20 രൂ. വീതവും പുരയിടത്തിനു് ഏക്കറൊന്നിനു് 30 രൂ. വീതവും വദ്ധിച്ചപ്പോൾ ആണ്ടിൽ 1050 രൂ. പാട്ടത്തുകയിൽ കൂടി. നിലത്തിൻെറയും പുരയിടത്തിൻെറയും വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

21. ഒരു കാറിൻെറ വാടകനിരക്കു് മൈൽ ഒന്നിനു് 1 രൂപയും കാത്തുനില്ക്കുന്നവകയ്ക്കു് മണിക്കൂർ ഒന്നിനു 4 രൂപയും ആകുന്നു. ഒരു യാത്രയിൽ മണിക്കൂറൊന്നിനു 16 മൈൽ വീതം വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചപ്പോൾ ആകെ വാടക 40 രൂ. കിട്ടി. കാത്തുനിൽക്കുന്ന സമയം $\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ കൂടിയിരിക്കുകയും മണിക്കൂർ ഒന്നിനു് 20 മൈൽ വീതം വേഗത്തിൽ ഓടിക്കുകയും ചെയ്തിരുന്നാൽ വാടക അതേ തുക തന്നെയായിരിക്കും. എന്നാൽ വാടകയ്ക്കു കൊടുത്ത ആകെ സമയം കാണുക.

22. 65 മൈൽ അകലെ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന A, B എന്ന സ്ഥലങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന റോഡിൽ കുറെ ഭാഗം നിരപ്പുള്ളതും കുറേ

ഏററവും കുറെ ഇറക്കവുമാണ്. ഒരു കാർ നിരപ്പായ സ്ഥലത്തിൽ മണിക്കൂർ ഒന്നിനു് 20 മൈലും ഏററത്തിൽ 15 മൈലും ഇറക്കത്തിൽ 25 മൈലും വേഗത്തിൽ ഓടുന്നു. A ൽനിന്നു B ൽ എത്തുവാൻ 3 മ. 36 മി. സമയവും B ൽനിന്നു് A ൽ എത്തുവാൻ 3 മ. 12 മി. സമയവും വേണം. എന്നാൽ A ൽ നിന്നു B ലേക്കു പോകുമ്പോൾ ഏററവും ഇറക്കവും എത്ര മൈൽ.

23. രണ്ടക്കമുള്ള ഒരു സംഖ്യയോടു് 9 കൂടിയാൽ അക്കങ്ങൾ മറിഞ്ഞുവരും. അക്കങ്ങളുടെ തുക 11 ആണ്. എന്നാൽ സംഖ്യ എത്ര.

24. തിരുവനന്തപുരത്തുനിന്നു രാവിലെ 8 മണിക്കു നാഗരുകോവിലിലേക്കും നാഗരുകോവിലിൽനിന്നു രാവിലെ 8 മ. 20 മി. നു് തിരുവനന്തപുരത്തേക്കും ഓരോ·ബസ്സു പുറപ്പെടുന്നു. രണ്ടു സ്ഥലം തമ്മിലുള്ള ദൂരം 42 മൈൽ. ബസ്സുകൾ മണിക്കൂർ ഒന്നിനു് 14 മൈൽ വേഗത്തിൽ ഓടുന്നു. എന്നാൽ ബസ്സ് രണ്ടും ഇടയ്ക്കു് എവിടെവെച്ചു്, എപ്പോൾ കടന്നുപോകും.

25. ഒരു ജോലിക്കാരൻ പതിവായി ചെയ്യുന്ന ജോലിക്കു് മണിക്കൂർ ഒന്നിനു് 2 രൂപയും അതിൽ കൂടുതൽ ചെയ്യുന്ന ജോലിക്കു് മണിക്കൂർ ഒന്നിനു് 3 രൂപയും കൂലിയുണ്ടു്. 40 മണിക്കൂർ ജോലിചെയ്തവകയ്ക്കു് 84 രൂ. കൂലി കിട്ടിയാൽ കൂടുതൽ ചെയ്ത ജോലി എത്ര മണിക്കൂർ.

26. ഒരു കുപ്പിയിൽ 40% വീര്യമുള്ള 5 ഔൺസ് ആസിഡ് ഉണ്ടു്. അതിൻെറ വീര്യം $33\frac{1}{3}$% ആകണമെങ്കിൽ എത്ര ഔൺസ് വെള്ളംകൂടി ചേർക്കണം.

അദ്ധ്യായം VI

വിഘടനം

സംഖ്യകളെ വിഘടനം ചെയ്തു് ഉത്തമ ഘടകവും ലഘുഗുണിതവും കാണുന്നതുപോലെ രാശികളെയും വിഘടനം ചെയ്തു് അവയുടെ ഉത്തമഘടകവും ലഘുഗുണിതവും കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഗുണകങ്ങളുടെ ഉത്തമഘടകവും എല്ലാ രാശികളിലും വന്നിട്ടുള്ള ബീജങ്ങളുടെ ഏററവും കുറഞ്ഞ ഡിഗ്രിയും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നതു് ഉത്തമഘടകം. $9\,a^3b^2c$, $6\,a^2b$, $15\,a^2b^2c^2$; ഇവയിൽ 9, 6, 15 എന്നീ ഗുണകങ്ങളുടെ ഉ. ഘ. 3 ആകുന്നു. a, b ഇവ മാത്രമേ എല്ലാ രാശികളിലും വന്നിട്ടുള്ളു. അവയുടെ കുറഞ്ഞ ഡിഗ്രി a^2, b. അതുകൊണ്ടു് ഉ. ഘ. $= 3\,a^2b$. ഉ. ഘ. കൊണ്ടു് രാശികളെ ഹരിച്ചുവരുന്ന ഫലങ്ങൾക്കു് പൊതുഘടകമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല.

$$\frac{9\,a^3b^2c}{3\,a^2b} = 3\,abc; \quad \frac{6\,a^2b}{3\,a^2b} = 2; \quad \frac{15\,a^2b^2c^2}{3\,a^2b} = 5\,bc^2.$$

(ഗുണകങ്ങളുടെ ലഘുഗുണിതവും, എല്ലാ ബീജങ്ങളുടെയും ഏററവുംകൂടിയ ഡിഗ്രിയും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നതു് ലഘുഗുണിതം.) $9\,a^3b^2c$, $6\,a^2b$, $15\,a^2b^2c^2$; ഇവയിൽ ഗുണകങ്ങളുടെ ല. ഗു. 90 ആകുന്നു. എല്ലാ രാശികളിലും കൂടി $a, b, c,$ എന്നീ ബീജങ്ങളുണ്ടു്; അവയുടെ കൂടിയ ഡിഗ്രി a^3, b^2, c^2. അതുകൊണ്ടു് ല. ഗു. $= 90\,a^3b^2c^2$. ഓരോ രാശിയുംകൊണ്ടു് ല. ഗു. ത്തെ ഹരിച്ചുവരുന്ന ഫലങ്ങൾക്കു തമ്മിൽ പൊതുഘടകമുണ്ടായിരിക്കുകയില്ല.

$$\frac{90\,a^3b^2c^2}{9\,a^3b^2c} = 10\,c; \quad \frac{90\,a^3b^2c^2}{6\,a^2b} = 15\,abc^2; \quad \frac{90\,a^3b^2c^2}{15\,a^2b^2c^2} = 6\,a.$$

അഭ്യാസം 19

ഉ. ഘ. വും ല. ഗു. വും കാണുക.

1. ax, ay
2. a^2, ax
3. a^2, a
4. a^4, a^2, a^3
5. a^3, a^2x, ax^2
6. a^3b, a^2b^2, ab^3
7. a^2bc, ab^2c, abc^2
8. abc, a^2b, a^3
9. a^2b, b^2c, abc

10. $9\,x^2y^3,\ 6\,xy^3$

11. $10\,x^3y,\ 2\,x^2y^3,$

12. $14\,p^2q^3r^2,\ 7\,p^2q^2r^3$

13. $16\,m^3n^2,\ 8\,m^2n^2,\ 4\,m^2n$

14. $15\,x^3y,\ 5\,x^2y^2,\ 20\,xy^3$

15. $81ab^3,\ 9\,a^3b,\ 27\,a^2b^3,\ 3\,a^4b^2$

16. $2\,a^2,\ 6\,ab,\ 4\,b^2$

17. $x^2,\ 5\,xy,\ 2\,xy^2,\ y^2$

18. $8\,p^2,\ 20\,p,\ 4$

19. $6\,ab^2c,\ 10\,a^2c,\ 2\,bc^3$

20. $10\,ab^2c^3,\ 5\,ab^2c,\ 15\,b^3c^3$

രാശിമാലകളുടെ ഉ. ഘ. വും ല. ഗു. വും കാണുന്നതിന് അവയെ ആദ്യമായി വിഘടനം ചെയ്യണം. രാശിമാലകളെ വിഘടനംചെയ്യുന്നതിനുള്ള രീതികളും ഉദാഹരണങ്ങളും താഴെ വിവരിച്ചിരിക്കുന്നു. സൗകര്യത്തിനുവേണ്ടി രീതികൾക്കു പേരും കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

1. <u>ഉത്തമഘടകക്രിയ</u>: രാശികളുടെ ഉത്തമഘടകംകൊണ്ടു ഹരിക്കുക. രാശിമാലയുടെ വിഘടനത്തിൽ ആദ്യമായി ചെയ്യേണ്ട ക്രിയ ഇതാണ്.

$4\,a^2x - 6\,ax^2 = 2\,ax\,(2\,a - 3\,x)$. ഇതിൽ $2\,ax$ ഒരു ഘടകമായും $2\,a - 3\,x$ മറെറാരു ഘടകമായും ഗണിക്കുന്നു. ഉത്തമഘടകത്തോട് ന്യൂനചിഹ്നംകൂടിചേർത്തു ഹരിച്ചാൽ $-2\,ax\,(-2\,a+3x)$ എന്നു കിട്ടും. ന്യൂനരാശിയിൽ ആരംഭിക്കുന്ന രാശിമാലയെ വിഘടനംചെയ്യുമ്പോൾ ഈ രീതി സൗകര്യമായിരിക്കും.

$-6\,x^2y + 10\,xy = -2\,xy\,(3\,x - 5)$

അഭ്യാസം 20

വിഘടനംചെയ്യുക

1. $ax - x^2$

2. $x^2 - ax$

3. $4\,p^2 - 12\,p$

4. $b^2 + b$

5. $7 - 14\,a^2$

6. $a^3 + 6\,a^2p$

7. $pqr - qrs$

8. $6x^2 - 9x^3 + 3x$

9. $-14x^2 + 7ax$

10. $-4a^2x - 6ax^2 + 2ax$

ഉത്തമഘടകങ്ങളൊട്ടു ന്യൂനം ചേർത്തു വിഘടനംചെയ്യുക

11. $-by + y^2$

12. $-2x - 2$

13. $5q^3 - q^2$

14. $xy + 2x$

15. $3ab - 6bc$

16. $ab - a^2b^2$

17. $x^2y + xy^2$

18. $5a^3b - 15a^2b^2 - 10ab^3$

19. $-8a^2b^3 - ab^2$

20. $-ax^2y + axy^2 - ax^2y^2$

2. ബീജകല്പനം. ഒരു രാശിമാലയ്ക്കു പകരം ഒരു ബീജം എഴുതിയാൽ ആ രാശിമാലയുടെ രൂപം സ്പഷ്ടമാകും. ഇതു വിഘടനക്രിയയ്ക്കു സഹായകമായ ഒരു ഉപായമാണു്.

$a(x+y) - b(x+y)$

$x+y$ യ്ക്കു പകരം p എഴുതുക: $ap - bp$.

ഉത്തമഘടകം വേർതിരിക്കുക: $p(a-b)$

p യ്ക്കു പകരം തിരിയെ $x+y$ എഴുതുക: $(x+y)(a-b)$.

$\therefore a(x-y) - b(x+y) = (x+y)(a-b)$.

ഒരു രാശിമാലയിൽത്തന്നെ വലയത്തിനുള്ളിൽ ചെറിയ രാശിമാലകൾ കാണുന്നിടത്താണു് ഈ ഉപായം പ്രയോജനപ്പെടുന്നതു്. പകരം തിരിയെ എഴുതുമ്പോൾ ചിഹ്നങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം.

$a(a+b) - (x-y)(a+b)$.

$ap - qp$ — $a+b = p;\ x-y = q$.

$= p(a-q)$ — ഉത്തമഘടകം.

$= (a+b)(a-x+y)$ — q നു പകരം $x-y$ എഴുതേണ്ടതിനാൽ $-q$ നു പകരം $-x+y$ എഴുതണം.

അഭ്യാസം 21

വിഘടനം ചെയ്യുക.

1. $a(a+b)-b(a+b)$
2. $4x(x+2)+3(x+2)$
3. $a^2(a+1)+a+1$
4. $1-x-a(1-x)$
5. $(x+y)(a+b)-(x-y)(a+b)$
6. $(p-q)(x-y)+(p-q)(x+y)$
7. $(2x-3y)(x+y)-(x+y)(3x-2y)$
8. $(2x-1)(x-2)+(x-2)(x+4)$
9. $(x-a)(4+a)-(4a-1)(x-a)$
10. $(a-2b)(a+2b)-(4a-3b)(a-2b)+(a-2b)(3a+b)$

ഉത്തമഘടകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ പിന്നീടുള്ള ക്രിയ രാശികളുടെ എണ്ണവും ലക്ഷണവും അനുസരിച്ചു നിശ്ചയിക്കണം.

3. വർഗ്ഗവ്യത്യാസം. രാശികളുടെ എണ്ണം രണ്ടു്. രണ്ടിനും വർഗ്ഗമൂലമുണ്ടു്. ആദ്യത്തേതു് അധിക രാശിയും രണ്ടാമത്തേതു് ന്യൂനരാശിയും. $a^2-b^2\equiv(a+b)(a-b)$ എന്ന ബീജവാക്യം മാതൃക. വർഗ്ഗമൂലങ്ങളെടുത്തു് അവയുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും എഴുതിയാൽ രണ്ടു ഘടകങ്ങളാകും.

$4x^2-9=(2x+3)(2x-3)$.

അഭ്യാസം 22

വിഘടനം ചെയ്യുക.

1. a^2-b^2
2. a^2-1
3. a^2-9
4. $1-x^2$
5. $4-x^2$
6. $4a^2-25$
7. a^4-b^2
8. $4-x^6$

9. p^4-49

10. $4c^4-1$

11. $1-9a^2b^2$

12. $9-a^2b^2$

13. $100-a^2x^2$

14. $1-100a^2x^2$

---

4. <u>വർഗ്ഗമാല.</u> ഒരു രാശിമാലയുടെ വർഗ്ഗത്തിനു വർഗ്ഗമാല എന്നു പറയാം. രാശികളുടെ എണ്ണം മൂന്നു്. ആദ്യത്തേതും ഒടുവിലത്തേതും അധിക രാശികൾ. അവയ്ക്കു രണ്ടിനും വർഗ്ഗമൂലമുണ്ടു്. രണ്ടുവർഗ്ഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു നടുവിലത്തെ രാശി. അതു് അധികമോ ന്യൂനമോ ആകാം.

$$a^2+2ab+b^2 \equiv (a+b)^2 \; ; \; a^2-2ab+b^2 \equiv (a-b)^2$$

എന്ന ബീജവാക്യങ്ങൾ മാതൃക. രണ്ടുവർഗ്ഗമൂലങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കു് നടുവിലത്തെ രാശിയുടെ ചിഹ്നം എഴുതിയാൽ രാശിമാലയുടെ വർഗ്ഗമൂലമാകും. വർഗ്ഗമാലയ്ക്കു രണ്ടു സമമായ ഘടകങ്ങളുണ്ടു്; ഓരോന്നും ആ വർഗ്ഗമൂലത്തിനു തുല്യമാണു്.

$$4x^2-12x+9 = (2x-3)^2 \; ; \; \sqrt{(4x^2-12x+9)} = 2x-3$$

$$100x^2+20xy+y^2 = (10x+y)^2 \; ; \; \sqrt{(100x^2+20xy+y^2)} = 10x+y$$

അഭ്യാസം 23

താഴെ കാണുന്ന ഓരോന്നും വർഗ്ഗമാലയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഘടകങ്ങളും വർഗ്ഗമൂലവും എഴുതുക.

1. x^2+4x+4

2. a^2-6x+9

3. $4b^2-4b+1$

4. $9a^2-6ab-b^2$

5. $100+20c+c^2$

6. x^2+3x+6

7. $4a^2-4ab+b^2$

8. $9x^2+12xy+4y^2$

9. $1+2x+x^2$

10. $1-2a+a^2$

11. a^2+b^2

12. $1+2x^2+x^4$

13. $x^4+2a^2x^2+a^2$

14. x^4-2x^2+1

15. $a^4-2a^2b^2+b^4$
16. $x^4+2x^2y^2+y^4$
17. $x^2y^2+2xy+1$
18. $1-10ab+25a^2b^2$
19. $x^2-18x+81$
20. $4p^2-6pq+9q^2$

---

5. സമവലയം. രാശികളുടെ എണ്ണം നാലു്. മാതൃക താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$2x^2+2ax-3x-3a$

$(2x^2+2ax)-(3x+3a)$ രണ്ടുകൂട്ടമായി വേർതിരിക്കണം.

$2x(x+a)-3(x+a)$ ഓരോന്നിലും ഉത്തമഘടകം പുറത്തെടുക്കണം.

$(x+a)(2x-3)$. അപ്പോൾ വലയത്തിനുള്ളിൽ തുല്യമായ രാശിമാലകൾ പ്രത്യക്ഷപ്പെടും. പിന്നീടു് ബീജകല്പനം പോലെ.

വലയത്തിനുള്ളിലെ രാശിമാലകൾ സമമായി വന്നില്ലെങ്കിൽ ഈ രീതിയിൽ വിഘടനം ചെയ്യാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

നോട്ടു്:—രാശികളെ മറിച്ചിട്ടു് രാശിമാലകളെ സമമാക്കി എഴുതാവുന്ന ഒരു സന്ദർഭമുണ്ടു്.

$a-b = -b+a = -(b-a)$.

$b-a = -a+b = -(a-b)$.

അതുകൊണ്ടു് $a-b$ എന്നതിനെ $-(b-a)$ എന്നും $b-a$ എന്നതിനെ $-(a-b)$ എന്നും എഴുതാം.

$ax-bx+by-ay$.

$(ax-bx)+(by-ay)$: രണ്ടുകൂട്ടമായി ഭാഗിക്കുന്നു.

$x(a-b)+y(b-a)$: ഉത്തമഘടകം.

$x(a-b)-y(a-b)$: രാശികളെ മറിച്ചെഴുതുന്നു.

$(a-b)(x-y)$.

അഭ്യാസം 24

വിഘടനം ചെയ്യുക.

1.	$a^2 - ax + ay - xy.$	2.	$2a^2 - 2a + 3a - 3$
3.	$5x^2 + ax + 5xy + ay$	4.	$ac + bc + ad + bd$
5.	$x^2 - px + qx - pq$	6.	$ac + bc - ad - bd$
7.	$x^2 - ax - bx + ab$	8.	$3x^2 + 6x - x - 2$
9.	$15 - 6a - 10a + 4a^2$	10.	$mx - nx - ny + my$
11.	$5x^2 - ax + ab - 5bx$	12.	$x^2 - ax + ab - bx$
13.	$a^3 - a^2 + a - 1$	14.	$1 + x + x^2 + x^3$
15.	$x^2 + 5x - 30 - 6x$	16.	$1 - x - x^2 + x^3$

---

6. <u>വർഗ്ഗാദി രാശിമാല (ക്വാഡ്റാറ്റിക്)</u> രാശികളുടെ എണ്ണം മൂന്ന്. ആദ്യത്തെ രാശിയിലും ഒടുവിലത്തെ രാശിയിലുമുള്ള ബീജങ്ങൾക്കു വർഗ്ഗമൂലമുണ്ട്; രണ്ടു വർഗ്ഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണ് നടുവിലത്തെ രാശിയിലെ ബീജം. ചിഹ്നങ്ങൾ ഏതുമാകാം.

നടുവിലത്തെ രാശിയെ രണ്ടു രാശിയായി പിരിച്ചെഴുതണം. രണ്ടിന്റെയും ഗുണകങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചുവരുന്ന ഫലം ആദ്യത്തെ ഗുണകവും ഒടുവിലത്തെ ഗുണകവും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചുവരുന്ന ഫലത്തോടു തുല്യമായിരിക്കണം; ഗുണകങ്ങളോട് അതാതു ചിഹ്നം കൂടി ചേർത്തുവേണം ഗുണിച്ചുനോക്കേണ്ടതു്.

$4\,x^2 + 4\,xy - 15\,y^2$	$+10\,xy - 6\,xy = +4\,xy$
$4\,x^2 + 10\,xy - 6\,xy - 15\,y^2$	$(+10)(-6) = -60$
	$(4)(-15) = -60$

ഇത്രയും ശരിയായി കിട്ടിയാൽ സമവലയം എന്ന രീതിയിൽ വിഘടനം ചെയ്യുക; ശരിയായി കിട്ടുന്നില്ലെങ്കിൽ വിഘടനം ചെയ്യാവുന്നതല്ല.

$(4x^2+10xy)-(6xy+15y^2)$　　രണ്ടുക്രമം.

$2x(2x+5y)-3y(2x+5y)$　　ഉത്തമഘടകം.

$(2x+5y)(2x-3y)$

നോട്ട്:—രാശികളെ സംബന്ധിച്ചു് ആദ്യത്തേതു്, രണ്ടാമത്തേതു് എന്നും മററും പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതു് രാശിമാലയുടെ മാതൃകാരൂപത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണു്. രാശികളുടെ ക്രമം മാതൃകാരൂപമനുസരിച്ചു് എഴുതിയതിനു ശേഷമേ മേൽ വിവരിച്ചിരിക്കുന്ന വിഘടനരീതികൾ പ്രയോഗിക്കാവൂ.

അഭ്യാസം 25

വിഘടനം ചെയ്യുക

1. $x^2+7x+12$
2. $x^2+7x+10$
3. x^2+5x+6
4. $x^2+10x+21$
5. $a^2-7a+10$
6. a^2-4a+3
7. $a^2-6ab+8b^2$
8. $a^2-11ab+18b^2$
9. $2x^2+7x+3$
10. $6p^2+19p+15$
11. $10b^2-17b+3$
12. $12y^2-25y+12$
13. $x^2+2xy-15xy$
14. $x^2-2xy-15xy$
15. $y^2+4y-12$
16. $y^2-4y-12$
17. $2a^2-7a-4$
18. $2a^2+7a-4$
19. $3b^2-4bc-4c^2$
20. $3b^2+4bc-4c^2$
21. a^2+5a+6
22. a^2-a-6
23. a^2+a-6
24. a^2-5a-6
25. x^2+3x+2
26. x^2-3x+2
27. x^2-x-2
28. x^2+x-2
29. p^2+4p+3
30. p^2-2p-3
31. p_2-4p+3
32. $p+2p-3^2$

33. $2x^2+11x+12$

34. $3x^2-8x+5$

35. $6+13x+6x^2$

36. $4-13x-12x^2$

37. $5-17a+6a^2$

38. $15+x-2x^2$

39. $4y^2-11y-3$

40. $3x^2+7x+2$

ഒന്നിലധികം രീതികൾ പ്രയോഗിക്കേണ്ട വിഘടനക്രിയയ്ക്കു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ താഴെ ചേൎത്തിരിക്കുന്നു.

1. $3a^3-27a$ — ഉത്തമഘടകം
   $= 3a(a^2-9)$ — വൎഗ്ഗവ്യത്യാസം
   $= 3a(a+3)(a-3)$

2. $8b(a+b)^2-2b(a-b)^2$ — ബീജകല്പനം $a+b=p$, $a-b=q$
   $=8bp^2-2bq^2$
   $=2b(4p^2-q^2)$ — ഉത്തമഘടകം
   $=2b(2p+q)(2p-q)$ — വൎഗ്ഗവ്യത്യാസം
   $2p+q = 2(a+b)+(a-b) = 3a+b$
   $2p-q = 2(a+b)-(a-b) = a+3b$
   ഘടകങ്ങൾ $= 2b(3a+b)(a+3b)$

3. $6x^2-23x-10$ — ഉത്തമഘടകം
   $= 2(3x^2-14x-5)$ — വൎഗ്ഗാദി
   $3x^2-15x+x-5$
   $= 3x(x-5)+(x-5)$
   $= (x-5)(3x+1)$
   ഘടകങ്ങൾ $= 2(x-5)(3x+1)$

4. $(x+4)(2x-5)-(x+4)(x+7)$ — $x+4=p$; $2x-5=q$; $x+7=r$
   $=pq-pr$
   $=p(q-r)$ — ഉത്തമഘടകം.
   $q-r=(2x-5)-(x+7)=x-12$
   ഘടകങ്ങൾ $=(x+4)(x-12)$

5. $3x^2+18x+27$ ഉത്തമഘടകം

$= 3(x^2+6x+9)$ വർഗ്ഗമാല

$= 3(x+3)^2$

6. x^4-y^4 വർഗ്ഗവ്യത്യാസം

$= (x^2+y^2)(x^2-y^2)$ വർഗ്ഗവ്യത്യാസം

$= (x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

7. $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8$ $x^2-3x = p$

$= p^2-2p-8$ വർഗ്ഗാദി

$= p^2-4p+2p-8$

$= p(p-4)+2(p-4)$

$= (p-4)(p+2)$

$p-4 = x^2-3x-4$ വർഗ്ഗാദി

$= x^2-4x+x-4$

$= x(x-4)+(x-4)$

$= (x-4)(x+1)$

$p+2 = x^2-3x+2$ വർഗ്ഗാദി

$= x^2-2x-x+2$

$= x(x-2)-(x-2)$

$= (x-2)(x-1)$

ഘടകങ്ങൾ $= (x-4)(x+1)(x-2)(x-1)$

8. $a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$ സമവലയം

$= (a^2x^2-a^2y^2)-(b^2x^2-b^2y^2)$

$= a^2(x^2-y^2)-b^2(x^2-y^2)$

$= (x^2-y^2)(a^2-b^2)$ വർഗ്ഗവ്യത്യാസം

$= (x+y)(x-y)(a+b)(a-b)$

9. a^4-a^2+2a-1

$= a^4-(a^2-2a+1)$ വർഗ്ഗമാല

$= a^4-(a-1)^2$

$= a^4-p^2$ $a-1 = p$

$= (a^2+p)(a^2-p)$ വർഗ്ഗവ്യത്യാസം

$= (a^2+a-1)(a^2-a+1)$

10. a^2-b^2-a+b

$= (a^2-b^2)-(a-b)$

$= (a-b)(a+b)-(a-b)$ $\qquad a-b = p$

$= pq-p$ $\qquad a+b = q$

$= p(q-1)$

$= (a-b)(a+b-1)$

അഭ്യാസം 26

വിഘടനം ചെയ്യുക:—

1. $27a^3-48ab^2$
2. $7a^2-28b^2$
3. a^3b-ab^3
4. $8ax^2-18a$
5. $(a+b)^2-c^2$
6. $a^2-(x+y)^2$
7. $p^2-(a-b)^2$
8. $(x-y)^2-(a+b)^2$
9. $(x+y)^2-(a-b)^2$
10. $4x^2-(x+2y)^2$
11. $(2x-3y)^2-36y^2$
12. $(3x+y)^2-(x-5y)^2$
13. $(a-2b+c)^2-(b-3c-2a)^2$
14. $(-p+5q-2r)^2-(3p-q+4r)^2$
15. $(a+b)^2-(a-b)^2$
16. $(3x+2y)^2-(2x-3y)^2$
17. $(a+\;\;)^2-(b-\;\;)^2$
18. $(a+b-1)^2-(a-b+1)^2$
19. $(3a+8b)^2-(2a-3b)^2$
20. x^3-8x^2+12x
21. $3x^2-9x-30$
22. $(2x+3)(x-5)-(3x+1)(2x+3)$
23. $(a-b)(5a-b)+(a-b)(2a+b)$
24. a^3-10a^2+25a
25. $2x+16ax+32a^2x$
26. $1-a^4$
27. x^4-y^4
28. b^4-1
29. $(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$
30. $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24$
31. $(x^2+1)^2-8(x^2+1)+15$
32. $a^7x^3-a^3x^7$
33. $3y^2-3(x-y)^2$
34. $(ac+bd)^2-(bc+ad)^2$
35. $(a^2+ab)^2-(ab+b^2)^2$
36. $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$
37. $a^2+2ab+b^2-c^2$
38. $a^2-b^2-2bc-c^2$
39. x^4-x^2+4x-4
40. $1-x^2+2xy-y^2$

അഭ്യാസം 27

S. S. L. C. Questions

ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക.

1. $7x^2+39x-18$
2. $(2a^2+b^2)^2-(a^2+2b^2)^2$
3. $4(2x+3y)^2-9(x-y)^2$
4. $21x^2-19x-12$
5. $(x^2-1)^2-(2x+2)^2$
6. $(x^2-ax)^2-(ax-a^2)^2$
7. $4(x-1)^2-9x$
8. $(x^2+3x+2)^2-9(x+1)^2$
9. $(3x^2-4x-1)^2-(x^2+2x-5)^2$
10. $a^2-b^2-c^2+2bc$
11. $(2a-1)^2-(a-2)^2$
12. $a(a-b)+a-b$
13. $8x^2+2xy-15y^2$
14. x^2-4y^2+x-2y
15. $10x^2-x-21$
16. $x^2-y^2+2yz-z^2$
17. $(x^2-5x)^2-2(x^2-5x)-24$
18. $16-9(x+y)^2$
19. $6(2a+3b)^2-13(2a+3b)-5$
20. $(a-2)(a^2-4a+3)=(a-3)(a^2+2-3a)$ ആണെന്നു കാണിക്കുക. [രണ്ടു വർഗ്ഗാദികളെ വിഘടനം ചെയ്യണം]
21. $4y^2+36y+81$ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. അതിൽ നിന്നും 43681 ൻെറ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.
22. താഴെപ്പറയുന്ന സമവാക്യത്തിൽ വിട്ടിട്ടുള്ള രാശി എഴുതുക:–

$$a^4+4=(a^2+2)^2-(\qquad)^2.$$ ഇതിൽ നിന്നു് a^4+4 ൻെറ ഘടകങ്ങളും കാണുക.

രാശിമാലകളുടെ ഉത്തമഘടകം കാണുന്നതിനു് അവയെ വിഘടനംചെയ്തു് എല്ലാരാശിമാലകളിലും പൊതുവായി വരുന്ന ഓരോ ഘടകത്തിൻെറയും ഏററവും കുറഞ്ഞ ഡിഗ്രിയെടുത്തു ഗുണിക്കണം.

1. $3a^2 - 6ab = 3a(a - 2b)$ ഉ. ഘ. $= a(a - 2b)$

$a^3 - 4ab^2 = a(a^2 - 4b^2)$

$= a(a - 2b)(a + 2b)$

2. $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$ ഉ. ഘ. $= x + 1$

$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

3. $6 - 6x^2 = 6(1 - x)^2$

$= 6(1 + x)(1 - x)$

$6 - 4x - 2x^2 = 2(3 - 2x - x^2)$

$= 2(3 + x)(1 - x)$

$4 - 8x + 4x^2 = 4(1 - 2x + x^2)$ ഉ. ഘ. $= 2(1 - x)$

$= 4(1 - x)^2$

4. $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1)$

$= x(x + 1)^2$

$5x^2 + 10x + 5 = 5(x^2 + 2x + 1)$ ഉ. ഘ. $= (x + 1)^2$

$= 5(x + 1)^2$

രാശിമാലകളുടെ ലഘുഗുണിതം കാണുന്നതിന്ന് അവയെ വിഘടനംചെയ്തു് എല്ലാ ഘടകങ്ങളുടെയും ഏററവും കൂടിയ ഡിഗ്രിയെടുത്തു ഗുണിക്കണം.

1. $a^2 - b^2;\quad a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

ല. ഗു. $= (a + b)(a - b)^2$

2. $x^2 - 10x + 25;\quad x^2 - 25;\quad x^4 - 5x^3$

$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

$x^3 - 5x^2 = x^2(x - 5)$

ല. ഗു. $= x^2(x - 5)^2(x + 5)$

3. ഉത്തമഘടകവും ലഘുഗുണിതവും കാണുക.

$(x^2y - xy^2)^2;\quad x^4y^2 - x^2y^4;\quad x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$

$x^2y - xy^2 = xy(x - y)$

$(x^2y - xy^2)^2 = x^2y^2\,(x - y)^2$

$x^4y^2 - x^2y^4 = x^2y^2\,(x^2 - y^2) = x^2y^2\,(x - y)\,(x + y)$

$x^3y + 2\,x^2y^2 + xy^3 = xy\,(x^2 + 2\,xy + y^2)$

$= xy\,(x + y)^2$

$x^2y^2\,(x - y)^2;\quad x^2y^2\,(x - y)\,(x + y);\quad xy\,(x + y)^2$

ഉ. ഘ. $= xy$

ല. ഗു. $= x^2y^2\,(x - y)^2\,(x + y)^2$

നോട്ട്: ഉത്തമ ഘടകത്തിനു ഉത്തമസാധാരണ ഘടകം (ഉ. സാ. ഘ.) എന്നും ലഘു ഗുണിതത്തിനു ലഘുസാധാരണ ഗുണിതം (ല. സാ. ഗു.) എന്നു പറയാം.

അഭ്യാസം 28

ഉത്തമഘടകവും ലഘുഗുണിതവും കാണുക.

1. $3x-6y;\quad 2x-4y$
2. $ax+a^2;\ x^2-a^2$
3. $4x^2-9;\quad 2\,xy+3y$
4. $ax^2-a^3;\quad x^2+2ax+a^2$
5. $a^3b-ab^3;\quad a^2-2\,ab+b^2$
6. $4x^2-4;\quad 6x^2+12x+6$
7. $x^2-2x-3;\quad x^2+3x+2$
8. $x^2-9;\quad x^2+5x+6$
9. $2x^2+7x-4;\quad 4x^2-8x+3$
10. $1-9x^2;\quad 3+10x+3x^2$
11. $2a^3b+3a^2b^2-2ab^3;\quad 2a^4+5a^3b+2a^2b^2$
12. $5x^3-5x;\quad 20x^2-30x+10$
13. $x^2+3x+2;\quad x^2+4x+3;\quad x^2+5x+6$
14. $a^2bc-ab^2c;\quad ab^2c-abc^2;\quad abc^2-a^2bc$
15. $ab-ac;\quad a^3-a^2b$
16. $x^2;\quad x^2+x;\quad x^2+2x$
17. $x^2-x;\ x^2+x;\quad x^2-1$
18. $x^2-1;\quad x^2-2x+1;\quad x^2-x$
19. $x+2;\quad x^2-x-6;\quad x^2-4.$
20. $x^2-1;\quad 2x^2-3x+1;\quad 2x^2+x-1$

(S. S. L, C. Questions)

21. ഉ. സാ. ഘ. കാണുക. $(2x-1)(4x^2+8x+3)$,
$(2x+1)(4x^2+16x+15)$

22. ല. സാ. ഗു. കാണുക. $(2a-2b)^2, 3(a-b), a^3-a^2b$

23. ല. സാ. ഗു. കാണുക. $3(x^2-y^2), 4(x-y)^2, 18(x+y)^2$

24. ല. സാ. ഗു. കാണുക. $x^2-1, 7x^2+5x-2, 7x^2-5x-2$

25. ഉത്തമഘടകവും ലഘുഗുണിതവും കാണുക.

$$12x^3y(x^2-y^2)^2,\ 15(x^2y-xy^2)^3,\ 6(x^2y+xy^2)^2$$

അദ്ധ്യായം VII

ഭിന്നരാശി

ഭിന്നസംഖ്യയെപ്പോലുള്ള ബീജസാംഖ്യകൾക്ക് ഭിന്നരാശി എന്നുപറയാം. ഛേദത്തിൽ ബീജസംഖ്യയുണ്ടായിരിക്കുമെന്നുള്ളതാണ് ഭിന്നരാശികളുടെ ലക്ഷണം. $\frac{5x}{3}$, $\frac{3a-5b}{2}$ ഇവ ഭിന്നരാശികളല്ല; $\frac{3}{x}$, $\frac{4a}{3b}$, $\frac{x-2b}{4x+y}$ ഇവയെല്ലാം ഭിന്നരാശികളാണ്.

ഭിന്നസാംഖ്യകളുടെ ചതുഷ്ക്രിയകൾ പോലെതന്നെയാണ് ഭിന്നരാശികളുടെ ചതുഷ്ക്രിയകളും.

അംശത്തിനും ഛേദത്തിനും പൊതുവായുള്ള ഘടകങ്ങൾ വെട്ടിക്കുറയ്ക്കണം.

1. $\frac{6a^2b}{7ax^2} \times \frac{14xy}{4b^2y} = \frac{3a}{bx}$

2. $\frac{a^2-b^2}{a^3-a} \div \frac{a^2-ab}{a^2-a-2} = \frac{a^2-b^2}{a^3-a} \times \frac{a^2-a-2}{a^2-ab}$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{a(a+1)(a-1)} \times \frac{(a-2)(a+1)}{a(a-b)} = \frac{(a+b)(a-2)}{a^2(a-1)}$$

3. $\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} \div \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} \times \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

$= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)} \times \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = 1$

സമച്ഛേദീകരണം

4. $\frac{x}{a^2b} - \frac{y}{b^2c} + \frac{z}{c^2a} = \frac{bc^2x - a^2cy + ab^2z}{a^2b^2c^2}$

5. $1 + \frac{a}{b} = \frac{b+a}{b}$

6. $\frac{x^2}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{1-x}$ $\qquad 1-x = -(x-1)$

$= \frac{x^2}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}$

$= \frac{x^2 + x\,(x-1) + x\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)}$

$= \frac{3x^2}{(x+1)(x-1)}$

അഭ്യാസം 29

ക്രിയചെയ്തു ചുരുക്കി എഴുതുക.

1. $\frac{x}{y} \div \frac{z^2}{y^2} \times \frac{z^3}{x^3}$ 2. $\frac{4a^3}{5b^3} \times \frac{7b^3}{6ac} \div \frac{21a^2}{10b^2c^3}$

3. $\frac{3x^2y}{x\,(x^2-y^2)} \times \frac{x^2-2xy+y^2}{6xy}$

4. $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} \times \frac{a+b}{a-b}$

5. $\frac{5x^2+10xy}{x^2-4y^2} \div \frac{10y}{x^2-4xy+4y^2}$

6. $\dfrac{2x^2-18}{ax+1} \times \dfrac{a^2x^2-1}{6x-18}$

7. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2} \div \dfrac{x^3y^2+x^2y^3}{x^3y-xy^3} \times \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}$

8. $\dfrac{x^2-x-6}{10x^2-10x} \div \dfrac{x^2-2x-3}{4x^2-8x}$

9. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-9} \times \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1} \times \dfrac{x^2+3x}{x^2-4}$

10. $\dfrac{a^2-3a}{a^2-3a-4} \times \dfrac{a^2-1}{a^3-3a^2} \div \dfrac{2\,(a^2-4)}{a^2-3a-4}$

11. $\dfrac{2x}{9a} + \dfrac{5x^2}{6a^2}$

12. $\dfrac{1}{6x^2y} - \dfrac{1}{4xy^2}$

13. $\dfrac{c}{a^2b} - \dfrac{a}{b^2c} + \dfrac{b}{c^2a}$

14. $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{3}{x+2}$

15. $x - \dfrac{1}{a}$

16. $1 + \dfrac{a}{b}$

17. $\dfrac{a}{b} - 1$

18. $x - \dfrac{1}{x}$

19. $x + \dfrac{1}{x}$

20. $1 - \dfrac{a}{x+a}$

21. $1 + \dfrac{a}{x+a}$

22. $1 + \dfrac{a}{x-a}$

23. $1 - \dfrac{a}{x-a}$

24. $\dfrac{4}{x+y} + \dfrac{1}{x-y}$

25. $\dfrac{a^2}{a^2-1} + \dfrac{a}{a+1} - \dfrac{a}{a-1}$

26. $1-\frac{2}{3-x}+\frac{10}{6+x-x^2}$

27. $\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}$

28. $\frac{x+1}{x^2-7x+10}+\frac{x+2}{x^2-6x+5}+\frac{x+5}{x^2-3x+2}$

29. $\frac{4y}{x^2+4xy+4y^2}-\frac{x}{x^2+xy-2y^2}+\frac{1}{x-y}$

30. $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$

(S. S. L. C. Questions)

ലഘൂകരിക്കുക.

31. $\frac{5x-12}{x^2-5x+6}-\frac{7x-24}{x^2-7x+12}+\frac{3x-4}{x^2-6x+8}$

32. $\frac{1}{a^2-3a+2}-\frac{3}{a^2-5x+6}+\frac{2}{a^2-4a+3}$

33. $(x^2+12-7x)\,(x^2-6x+5)\div(x^2+3-4x)$

34. $\frac{2}{2y-y^2}+\frac{y}{4-2y}$

35. $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+2x-3}-\frac{1}{(x^2-1)\,(x+2)}$

36. $\frac{y}{x-y}-\frac{x-y}{y-x}$

37. $\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{b}{b^2-a^2}$

38. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)\,(c-b)}$

39. $\frac{a+p}{a-p}-\frac{a-p}{a+p}$

40. $\frac{a+p}{a-p}+\frac{a-p}{a+p}$

41. $\dfrac{b-c}{bc} + \dfrac{c-a}{ca} + \dfrac{a-b}{ab}$

42. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-3ab+2b^2} \times \dfrac{ab-b^2}{(a-b)^2} \div \dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}$

43. $\dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{2b}{a^2+b^2}$

44. $\dfrac{a^2-4a+3}{a^2-5a+4} \div \dfrac{a^2-10a+21}{a^2-9a+20} \times \dfrac{a^2-7a}{a^2-5a}$

അദ്ധ്യായം VII

വർഗ്ഗാദിസമവാക്യം

ഒരു ബീജം മാത്രമുള്ളതും അതിന്റെ വർഗ്ഗം ഉൾപ്പെടുന്നതും വർഗ്ഗത്തിനെക്കാൾ കൂടിയ ഡിഗ്രി വരാത്തതുമായ സമവാക്യത്തിനു് വർഗ്ഗാദിസമവാക്യം എന്നുപേർ. ഉദാ: $3x^2 - x = 14$

വർഗ്ഗാദിസമവാക്യം രണ്ടുതരത്തിലുണ്ടു്.

(i) ബീജവർഗ്ഗവും സംഖ്യയുംമാത്രമുള്ളതു്. ബീജവർഗ്ഗം ഇടതുവശത്തും സംഖ്യ വലതുവശത്തും വരുന്നതാണു് ഇതിന്റെ മാതൃകാരൂപം. $x^2 = 9$. രാശികൾ ഇടംവലംനീക്കി ചുരുക്കി എഴുതിയാൽ മാതൃകാരൂപം കിട്ടും.

$2x(x-3) = 6(3-x)$; ഇതിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

$2x^2-6x = 18-6x$	വലയം മാററുക
$2x^2-6x+6x = 18$	ഇടംവലം നീക്കുക
$2x^2 = 18$	ചുരുക്കി എഴുതുക
$x^2 = 9$	ബീജവർഗ്ഗം കാണുക
$x = 3$	ബീജാർത്ഥം കാണുക
$x = \pm 3$	

ബീജാർത്ഥം $+3$ യോ -3 യോ ഏതായാലും x^2 ൻെറ അർത്ഥസംഖ്യ 9 തന്നെയാണ്. അതായതു് 9-ൻെറ വർഗ്ഗമൂലം ± 3 ആണ്. ഇതു പോലെ ഏതു സംഖ്യയ്ക്കും രണ്ടുവർഗ്ഗമൂലമുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് വർഗ്ഗാദി സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ രണ്ടു ബീജാർത്ഥം കിട്ടും.

(ii) ബീജവർഗ്ഗവും ബീജവും സംഖ്യയും ഉള്ളതു്. എല്ലാ രാശികളും ഇടതുവശത്തും വലതുവശത്തു പൂജ്യവും വരുന്നതാണ് മാതൃകാരൂപം. അതായതു് ഇടതുവശത്തു് ഒരു വർഗ്ഗാദിരാശി മാലയും വലതുവശത്തു് പൂജ്യവും വരണം.

വർഗ്ഗാദിയെ വിഘടനംചെയ്യുമ്പോൾ രണ്ടു ഘടകങ്ങൾ കിട്ടും. അവയുടെ ഗുണനഫലം പൂജ്യമാകയാൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യ മായിരിക്കണം. അങ്ങനെ രണ്ട് ആദിസമവാക്യംകിട്ടും. അവ യുടെ ബീജാർത്ഥമാണ് വർഗ്ഗാദിയുടെ ബീജാർത്ഥം.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. $(2x-5)(3x+1)=2x(2x-5)+15$

$6x^2-13x-5=4x^2-10x+15$　　വലയം മാററുക

$6x^2-4x^2-13x+10x-5-15=0$　　ഇടംവലം നീക്കുക

$2x^2-3x-20=0$　　ചുരുക്കുക

$(2x+5)(x-4)=0$　　വിഘടനം ചെയ്യുക

$2x+5=0;\quad \therefore x=-2\frac{1}{2}$
$x-4=0;\quad \therefore x=4$
} രണ്ടു ബീജാർത്ഥം കാണുക

നോട്ട്: x ൻെറ സ്ഥാനത്തു് ഇതിൽ ഏതു ബീജാർത്ഥം എഴുതിയാലും സമവാക്യം ശരിയായിരിക്കും.

ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണവും ഈ രീതിയിൽ ക്രിയചെയ്യാവുന്നതാണ്.

$2x^2-6x+6x-18=0$　　ഇടംവലം നീക്കുക

$2x^2-18=0$　　ചുരുക്കി എഴുതുക

$x^2-9=0$　　2 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക

$(x+3)(x-3)=0$　　വിഘടനം ചെയ്യുക

$x+3=0;\quad \therefore x=-3$
$x-3=0;\quad \therefore x=+3$
} ബീജാർത്ഥം

ബീജവർഗ്ഗവും ബീജവുംമാത്രമുള്ള സമവാക്യങ്ങളും ഉണ്ടാകാം.

$x^2+5x=0$

$x(x+5)=0$ വിഘടനം ചെയ്യുക

$x=0$

$x+5=0; \quad \therefore \quad x=-5$ } ബീജാൎത്ഥം

ഭിന്നരാശികൾവരുന്ന ചില സമവാക്യങ്ങൾ സമഛേദീകരിക്കുമ്പോൾ വർഗ്ഗാദിസമവാക്യങ്ങളായിത്തീരും.

$\frac{14}{x-4}-\frac{14}{x}=\frac{2}{5}$ സമഛേദം $5x(x-4)$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക

$70x-70(x-4)=2x(x-4)$ വലയം നീക്കുക

$70x-70x+280=2x^2-8x$ ഇടംവലം നീക്കുക

$-2x^2+8x+280=0$ -2 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക

$x^2-4x-140=0$ വിഘടനം ചെയ്യുക

$(x-14)(x+10)=0$

$x-14=0; \quad \therefore \quad x=\ \ 14$

$x-10=0; \quad \therefore \quad x=-10$ } ബീജാൎത്ഥം

വർഗ്ഗാദിസമവാക്യങ്ങളുടെ നിൎദ്ധാരണംകൊണ്ടു ക്രിയചെയ്യേണ്ട യുക്തിചോദ്യങ്ങളുണ്ടു്.

87 അടി നീളവും 60 അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു പുരയിടത്തിനുള്ളിൽ ചുററുപാടും ഒരേ വീതിയിൽ ഒരു പാത നിൎമ്മിക്കുന്നു. പാതയൊഴിച്ചു് 3600 ച. അ. വിസ്തീൎണ്ണം കിട്ടണമെങ്കിൽ പാതയുടെ വീതി എന്തായിരിക്കണം.

പാതയുടെ വീതി $= x$ അടി

അകത്തെ നീളം $= 87-2x$ അടി

അകത്തെ വീതി $= 60-2x$ അടി

അകത്തെ വിസ്തീൎണ്ണം $= (87-2x)(60-2x)$ ച. അ.

$(87-2x)(60-2x)=3600$

$5220-294x+4x^2=3600$

$4x^2-294x+1620=0$

$2x^2-147x+810=0$

$2x^2-12x-135x+810=0$

$2x(x-6)-135(x-6)=0 \qquad (x-6)(2x-135)=0$

$x=6;\ 67\frac{1}{2}$

പാതയുടെ വീതി $67\frac{1}{2}$ അടിയാവുകയില്ല; അതുകൊണ്ടു് 6 എന്ന ബീജാൎത്ഥമേ സ്വീകരിക്കാവൂ. പാതയുടെ വീതി = 6 അടി.

ഒരാൾ 496 രൂപകൊടുത്തു് ഏതാനും റീം കടലാസ്സ വാങ്ങി. റീം ഒന്നിനു് 8 ണ. വില കുറഞ്ഞിരുന്നാൽ ഒരു റീംകൂടി കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ റീം ഒന്നിനു് എന്തു വിലകൊടുത്തു വാങ്ങി.

ഒരു റീമിന്റെ വില $= x$ രൂ.

496 രൂപയ്ക്കു കിട്ടുന്ന കടലാസ് $= \dfrac{496}{x}$ റീം

8 ണ. വിലകുറച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കടലാസ് $= \dfrac{496}{x-\frac{1}{2}}$ റീം

അവയുടെ വ്യത്യാസം $= 1$ റീം

$$\frac{496}{x-\frac{1}{2}} - \frac{496}{x} = 1$$

സമച്ഛേദം $= x\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$$496x-496\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = x\left(x-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$496x-496x+248 = x^2-\tfrac{1}{2}x$$

$$x^2-\tfrac{1}{2}x-248 = 0$$

$$2x^2-x-496 = 0$$

$$2x^2-32x+31x-496 = 0$$

$$2x(x-16)+31(x-16) = 0$$

$$(x-16)(2x+31) = 0$$

$$x-16 = 0;\quad \therefore\ x = 16$$

$$2x+31 = 0;\quad x = -15\tfrac{1}{2}$$

രണ്ടാമത്തെ ബീജാൎത്ഥം ഇവിടെ യോജിക്കുന്നതല്ല.

ഒരു റീമിന്റെ വില = 16 രൂ.

മണിക്കൂറൊന്നിനു് 15 മൈൽവീതം വേഗത്തിൽ ഓടാവുന്ന ഒരു ബോട്ടു് ഒഴുക്കുള്ള ഒരു നദിയിൽ 30 മൈൽ ദൂരം ഒഴുക്കിനു് അനുകൂലമായും പിന്നീടു് അത്രദൂരം ഒഴുക്കിനു് വിപരീതമായും ഓടുന്നു. ഇതിനു് ആകെ വേണ്ടസമയം 4 മ. 10 മി. ആണെങ്കിൽ ഒഴുക്കിന്റെ വേഗം എന്തു്?

ഒഴുക്കിൻെറ വേഗം = മ. x മൈൽ
ബോട്ടിന്ന സ്വാതന്ത്ര്യയുള്ളവേഗം = മ. 15 മൈൽ
ഒഴുക്കിന്ന് അനുകൂലമായ വേഗം = മ. $15+x$ മൈൽ
ഒഴുക്കിന്ന് പ്രതികൂലമായ വേഗം = മ. $15-x$ മൈൽ

30 മൈൽ ഒഴുക്ക താണുപോകാൻ വേണ്ട സമയം $= \dfrac{30}{15+x}$ മ.

30 മൈൽ ഒഴുക്ക കയറിപ്പോകാൻ വേണ്ട സമയം $= \dfrac{30}{15-x}$ മ.

ആകെ വേണ്ടസമയം $= 4\frac{1}{6}$ മ.

$$\frac{30}{15+x}+\frac{30}{15-x}=4\tfrac{1}{6}.$$

സമച്ഛേദം $= 6\,(15+x)\,(15-x)$

$$180\,(15-x)+180\,(15+x) = 25\,(15+x)\,(15-x)$$
$$2700-180x+2700+180x = 25\,(225-x^2)$$
$$= 5625-25x^2$$
$$25x^2+5400 = 5625$$
$$x^2 = 225; \qquad \therefore x^2 = 9; \qquad \therefore x = \pm 3$$

ഒഴുക്കിൻെറ വേഗം = മ. 3 മൈൽ

ഒരു തൊട്ടിയിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കുന്നതിന്ന് ഒരു കുഴലും ചോൎത്തിക്കളയുന്നതിന്ന് മറെറാരു കുഴലുമുണ്ട്. നിറയ്ക്കുന്നതിന്നവേണ്ട സമയത്തെക്കാൾ 15 മി. കൂടുതൽവേണം ചോൎത്തിക്കളയുന്നതിന്ന്. രണ്ടുംകൂടി തുറന്നുവെച്ചാൽ $1\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർകൊണ്ടു തൊട്ടിനിറയും. എന്നാൽ ഓരോ കുഴലിന്നും വേണ്ടസമയമെന്തു്?

നിറയ്ക്കുന്ന കുഴലിന്നവേണ്ടസമയം = x മി.
ചോൎത്തുന്ന കുഴലിന്ന വേണ്ട സമയം = $x+15$ മി.

1 മിനിട്ടിൽ നിറയുന്നതു് = തൊട്ടിയുടെ $\dfrac{1}{x}$ ഭാഗം

1 മിനിട്ടിൽ ചോൎന്നുപോകുന്നതു് = തൊട്ടിയുടെ $\dfrac{1}{x+15}$ ഭാഗം

രണ്ടും തുറന്നാൽ 1 മിനിട്ടിൽ നിറയുന്നതു് $= \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+15}$ ഭാഗം

രണ്ടും തുറന്നാൽ വേണ്ടസമയം = 90 മി.

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+15} = \frac{1}{90}$$

$$x+15-x = \frac{x^2+15x}{90}$$

$1350 = x^2+15x$

$x^2+15x-1350 = 0$

$(x+45)(x-30) = 0$

$x = 30$

നിറയ്ക്കുന്ന കുഴലിന് വേണ്ടസമയം = 30 മി.

ചോര്‍ത്തുന്ന കുഴലിനു വേണ്ടസമയം = 45 മി.

രണ്ടു ഭിന്നരാശികളെ തുല്യമാക്കിയിട്ടാല്‍ അതില്‍നിന്ന് സമവാക്യം ഉണ്ടാക്കാം. ഒന്നിന്റെ അംശവും മറേറതിന്റെ ഛേദവും തമ്മില്‍ ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന ഫലങ്ങള്‍ തുല്യമാക്കിയിടണം. സമഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലുള്ള ഫലവും അതുതന്നെയാണ്.

$$\frac{x^2+7}{x^2-5} = \frac{x^2-15}{x^2-3}$$

$(x^2+7)(x^2-3) = (x^2-15)(x^2-5)$

$x^4+4x^2-21 = x^4-20x^2+75$

$x^4-x^4+4x^2+20x^2 = 75+21$

$24x^2 = 96; \quad \therefore x^2 = 4; \quad \therefore x = \pm 2$

അഭ്യാസം 30

നിര്‍ദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

1. $6x^2-2x^2 = 63-3x^2$
2. $10x^2+25 = 100+7x^2$
3. $3(1-2x^2) = 5(x^2+4)-28$
4. $x(4x-3) = 3(12-x)$
5. $2(5x^2-3) = 6(1+x^2)-3$
6. $(x^2+7)(x^2-3) = (x^2-5)(x^2-15)$
7. $\frac{x^2-3}{4} + x^2 = \frac{1}{2} - \frac{x^2-1}{6}$

8. $\frac{x-2}{4x-3} - \frac{3x+1}{4x+3} = -\frac{5}{9}$

9. $(x+2)(x-7) = 0$

10. $(2x-1)(x+1) = 0$

11. $(3x+2)(2x-3) = 0$

12. $(3+4x)(1+2x) = 0$

13. $x^2-x-2=0$

14. $x^2-11x+30=0$

15. $x^2+15x+56=0$

16. $x^2+5x-36=0$

17. $2x^2-7x-15=0$

18. $3x^2+7x+2=0$

19. $10-29x+10x^2=0$

20. $2x^2-17x-84=0$

21. $x^2-8x-33=0$

22. $4x^2+3x-1=0$

23. $\frac{x}{4} + \frac{3}{x} = \frac{7}{4}$

24. $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$

25. $8 = 3x(9x-5)$

26. $x(3x-1) = 14$

27. $5x^2+18 = 21x$

28. $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2} = \frac{9}{x+5}$

29. $\frac{2x-1}{3x} - \frac{2}{x+1} = \frac{5}{6}$

30. $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x(1-x)}{2} = x^2-x$

31. $2(x-2) + \frac{7}{x+2} = 7$

32. $(x-3)(x+4) = 18$

33. $\frac{20}{x} - \frac{18}{x+\frac{1}{2}} = 2$

34. $\frac{35}{x-2\frac{1}{2}} - \frac{35}{x} = \frac{1}{4}$

35. $(x-2)\left(\frac{320}{x} + 2\right) = 324$

36. $\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x-2} = 5$

37. $\frac{1+x}{1+2x} - \frac{1-x}{1-2x} = \frac{4}{15}$

38. $\frac{x+2}{x-1} = \frac{4-x}{2x} + 2\frac{1}{3}$

39. $\frac{1}{9-2x} + \frac{4}{15} = \frac{1}{3-x}$

40. $2x(x+3) = (x+6)(x+8)$

S. S. L. C. Questions.

41. $\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x+4} = 1$

42. $\frac{12}{x} - \frac{x}{12} = \frac{3}{2}$

43. $2x+5 = \frac{1}{2x+5}$

44. $2(x-3) + \frac{7}{x+2} = 5$

അദ്ധ്യായം 31

1. ഒരാൾ 540 രൂപയ്ക്കു് ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ ഏതാനും പ്രതി കൾ വാങ്ങി. 2 പ്രതി കൂടുതൽ കിട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ ഓരോ പ്രതിയുടെയും വില 3 രൂ. കുറഞ്ഞിരിക്കുമായിരുന്നു. എന്നാൽ എത്ര പുസ്തകം വാങ്ങി.

2. ഒരാൾ 180 രൂപയ്ക്കു് ഏതാനും ഫൗണ്ടൻ പേനാ വാങ്ങി. ഒരു പേനയുടെ വില 3 രൂ. കുറഞ്ഞിരുന്നെങ്കിൽ 3 പേനാ കൂടുതൽ കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ പേനയൊന്നിനു് എന്തുവിലവെച്ചു വാങ്ങി.

3. ഒരു ബോട്ടു് ഒരേ വേഗത്തിൽ 105. മൈൽ ദൂരം യാത്രചെയ്യുന്നു. തിരിയെ അത്രയും ദൂരം മടങ്ങിവരുമ്പോൾ വേഗം മണിക്കൂർ തോറും 2 മൈൽ കുറവായതിനാൽ 6 മണിക്കൂർ കൂടുതൽ സമയം വേണ്ടിവന്നു. എന്നാൽ ആദ്യത്തെ യാത്രയിലെ വേഗം എന്തായിരുന്നു.

4. ഒരു എക്സ്പ്രസ് ട്രെയിനിനു് 45 മൈൽ ദൂരം പോകാൻ വേണ്ട സമയം ഒരു സാധാരണ ട്രെയിനിനു വേണ്ട സമയത്തെക്കാൾ 27 മി. കുറവാണു്. എക്സ്പ്രസ് ട്രെയിൻ ഓടുന്നതിനെക്കാൾ 5 മൈൽ വേഗം കുറച്ചാണു് സാധാരണ ട്രെയിൻ ഓടുന്നതു്. ഓരോന്നിന്റെയും വേഗമെന്തു്.

5. ഏതാനുംപേർകൂടി നടത്തിയ ഒരു വിനോദയാത്രയ്ക്കു് ആകെ 96 രൂ. ചിലവായി. അതു് എല്ലാവരും തുല്യമായി വീതിച്ചെടുക്കണമെന്നു നിശ്ചയിച്ചു് ഓരോരുത്തരുടെയും വീതം കണക്കാക്കി. എന്നാൽ അതിൽ ഒരാളിന്റെപക്കൽനിന്നുള്ള വീതം വാങ്ങേണ്ടെന്നു പിന്നീടു നിശ്ചയിക്കുകയും അതുംകൂടി ബാക്കിയുള്ളവർ തുല്യമായി വീതിച്ചെടുക്കുകയും ചെയ്തു. അതുകൊണ്ടു് ഓരോരുത്തരും 1 രൂ. 5 ണ. 4 പൈ. കൂടുതൽ കൊടുക്കേണ്ടതായിവന്നു. എന്നാൽ വിനോദയാത്രയിൽ പങ്കെടുത്തവർ എത്ര.

6. ഒരു തൊട്ടിയിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കുന്നതിനു് രണ്ടു കുഴലുണ്ടു്. വലിയ കുഴൽ തനിച്ചായാൽ തൊട്ടി നിറയുന്നതിനു വേണ്ട സമയം ചെറിയ കുഴൽ തനിച്ചായാലത്തെ സമയത്തിനെക്കാൾ 3 മി. കുറവാണു്. രണ്ടുംകൂടിയായാൽ $6\frac{2}{3}$ മി. മതിയാകും. ഓരോന്നും തനിച്ചായാൽ എത്ര സമയം വേണമെന്നു കാണുക.

7. A, B, C എന്ന മൂന്നാൾ കൂടി ഒരു ജോലി 4 മണിക്കൂർ സമയംകൊണ്ടു ചെയ്തുതീർക്കുന്നു. A യ്ക്കു തനിച്ചു് ആ ജോലി ചെയ്തുതീർക്കാൻ വേണ്ടിവരുന്ന സമയത്തെക്കാൾ 2 മണിക്കൂർ കൂടുതൽകൊണ്ടു് B യ്ക്കു് തനിച്ചും ഒന്നര ഇരട്ടി സമയംകൊണ്ടു് C യ്ക്കു തനിച്ചും അതു ചെയ്തുതീർക്കാൻ കഴിയും. എന്നാൽ A യ്ക്കു തനിച്ചു് എത്ര മണിക്കൂർകൊണ്ടു് ആ ജോലി ചെയ്യാം.

8. ഒരു തൊട്ടിയിൽ ഒരു കുഴൽവഴി വെള്ളം വന്നു നിറയുകയും മറെറാരു കുഴൽവഴി വെള്ളം ചോർന്നുപോകയും ചെയ്യുന്നു. നിറയ്ക്കുന്ന കുഴൽ തനിച്ചു പ്രവർത്തിച്ചാൽ തൊട്ടി നിറയുന്നതിനു വേണ്ട സമയവും ചോർത്തുന്ന കുഴൽ തനിച്ചു പ്രവർത്തിച്ചാൽ തൊട്ടി മുഴുവനും ചോരുന്നതിനു വേണ്ട സമയവും തമ്മിൽ 2 മണിക്കൂർ വ്യത്യാസമുണ്ടു്. രണ്ടുംകൂടി പ്രവർത്തിച്ചുകൊണ്ടിരുന്നാൽ 40 മണിക്കൂർ സമയംകൊണ്ടു് തൊട്ടി നിറയും. എന്നാൽ നിറയ്ക്കുന്ന കുഴൽ മാത്രമായാൽ തൊട്ടി നിറയുന്നതിനു് എത്ര സമയം വേണം.

9. Aയും Bയും കൂടി 6 ദിവസംകൊണ്ടു് ഒരു ജോലി ചെയ്തുതീർക്കുന്നു. Aയ്ക്കു തനിച്ചു് ആ ജോലി ചെയ്തുതീർക്കുന്നതിനു് വേണ്ട സമയത്തെക്കാൾ 5 ദിവസം കൂടുതൽകൊണ്ടു് Bയ്ക്കു തനിച്ചു ചെയ്തുതീർക്കാം. എന്നാൽ ഓരോരുത്തർക്കും തനിച്ചു് എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു് ആ ജോലി ചെയ്യാം.

10. മണിക്കൂറൊന്നിനു് $2\frac{1}{2}$ മൈൽ വേഗത്തിൽ ഒഴുകികൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു നദിയിൽ 15 മൈൽ ദൂരം ഒഴുക്കു താണും അത്രയും ദൂരം തിരികെ ഒഴുക്കു കയറിയും യാത്രചെയ്യാൻ ഒരു ബോട്ടിനു് $4\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ വേണം. എന്നാൽ ഒഴുക്കില്ലാതിരുന്നാൽ ബോട്ടിനു് ഒരു മണിക്കൂറിൽ എത്ര മൈൽ യാത്രചെയ്യാം.

11. ഒരു വണ്ടിച്ചക്രത്തിൻെറ ചുററളവു് മറെറാന്നിൻെറ ചുററളവിനെക്കാൾ ഒരടി കുറവാണു്. ഒരു ഫർലാംഗ് ദൂരം പോകുമ്പോൾ ചെറിയ ചക്രം വലിയ ചക്രത്തെക്കാൾ 33 പ്രാവശ്യം കൂടുതൽ കറങ്ങുന്നു. ഓരോന്നിൻെറയും ചുററളവുകാണുക.

12. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ ചുററളവു് മറെറാന്നിൻെറ ചുററളവിനെക്കാൾ 8 ഇഞ്ചു കൂടുതലാണു്. വലിയ സമചതുരത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം ചെറിയ സമചതുരത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തെ രണ്ടുകൊണ്ടു ഗുണി

ച്ച ഫലത്തെക്കാൾ 17 ച. ഇ. കുറവാണ്. എന്നാൽ ഓരോന്നിൻെറയും വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

13. സമചതുരമായ ഒരു പുൽത്തകിടിയുടെ ചുററം 5 അടി വീതിയിൽ ഒരു പാതയും അതിനു ചുററം 3 അടി വീതിയിൽ ഒരു തോട്ടം ഉണ്ട്. പുൽത്തകിടിയും തോട്ടം ചേർന്ന് 444 ച. അ. വിസ്തീർണ്ണമുണ്ട്. എന്നാൽ പുൽത്തകിടിയുടെ നീളമെന്ത്.

14. ഒരു ചതുരക്ഷേത്രത്തിൻെറ നീളവും വീതിയും 5 : 4 എന്ന അനുപാതത്തിലാണ്. അതിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം 180 ച. അ. ആണെങ്കിൽ നീളവും വീതിയും എത്ര.

15. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിൻെറ നീളവും വീതിയും 3 : 2 എന്ന അനുപാതത്തിലാണ്. നീളം ഒരിഞ്ചു കൂട്ടുകയും വീതി ഒരിഞ്ചു കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ വിസ്തീർണ്ണം ഒരു ച. അടിയാകും. എന്നാൽ ആദ്യത്തെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

16. ഒരു ചതുരക്ഷേത്രത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 6 : 5 എന്ന അനുപാതത്തിലാണ്. അതിനുപുറത്ത് നാലുചുററം 5 അടി വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. ക്ഷേത്രത്തിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം പാതയുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിൻെറ $2\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയാണെങ്കിൽ ക്ഷേത്രത്തിൻെറ നീളവും വീതിയും കാണുക.

17. ഒരു സ്ഥലത്തുനിന്ന് മറെറാരു സ്ഥലത്തേക്ക് 120 മൈൽ ദൂരമുള്ള ഒരു റോഡും 100 മൈൽ ദൂരമുള്ള മറെറാരു റോഡും ഉണ്ട്. ഒരു കാർ 120 മൈൽ ദൂരമുള്ള റോഡിൽകൂടി ഒരു ക്ലിപ്തവേഗത്തിൽ ഓടുന്നു. മറെറാന്ന് 100 മൈൽ ദൂരമുള്ള റോഡിൽകൂടി മണിക്കൂർ ഒന്നിന് 1 മൈൽ വീതം കുറഞ്ഞ വേഗത്തിലും ഓടുന്നു. രണ്ടാമത്തെ കാറിന് യാത്ര പൂർത്തിയാക്കാൻ ആദ്യത്തേതിനെക്കാൾ 50 മി. കുറച്ചു സമയം മതിയാകും. ഓരോന്നിൻെറയും വേഗമെന്ത്.

(S. S. L. C. Questions)

18. തുടർച്ചയായ രണ്ട് അധികസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അതിൽ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ മൂന്നിരട്ടിയെക്കാൾ 8 വലുതാണ്. എന്നാൽ സംഖ്യകൾ ഏതെല്ലാം.

19. Aയും Bയും കാൽനടയായി ഒരു സ്ഥലത്തുനിന്നു പുറപ്പെടുന്നു. മണിക്കൂർതോറുമുള്ള Bയുടെ വേഗം Aയുടെ വേഗത്തെക്കാൾ $\frac{1}{2}$ മൈൽ

കുറവാണു്; എന്നാൽ B പുറപ്പെട്ടതിനുശേഷം 10 മിനിട്ടു കഴിഞ്ഞേ A പുറപ്പെട്ടുന്നുള്ളൂ. രണ്ടുപേരും ഒരുമിച്ചു് അഞ്ചാമത്തെ മൈൽക്കുററിയിൽ എത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ ഓരോരുത്തരുടെയും വേഗം എത്ര.

20. 24 ഗജം നീളവും 16 ഗജം വീതിയുമുള്ള ഒരു പുൽത്തകിടിയുടെ ചുററും ഒരേ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ടു്. പുൽത്തകിടിയുടെ വിസ്തീർണ്ണവും പാതയുടെ വിസ്തീർണ്ണവും തുല്യമാണു്. എന്നാൽ പാതയുടെ വീതിയെന്തു്.

21. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 12. ഓരോ സംഖ്യയിൽനിന്നു് 1 കുറച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 16. എന്നാൽ സംഖ്യകൾ എത്ര.

22. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം 4. അവ രണ്ടും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു് 4 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ ഒരു പൂർണ്ണ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. അതു് 13-ൻെറ വർഗ്ഗമാണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ ഏവ.

23. ഒരു ട്രെയിൻ 209 മൈൽ ദൂരം ഒരു ക്ലിപ്തവേഗത്തിൽ ഓടുന്നു. മണിക്കൂറൊന്നിനു് 1 മൈൽ കൂടുതൽ വേഗത്തിൽ ഓടിയിരുന്നെങ്കിൽ ആകെ സമയം 16 മിനിട്ടുകുറച്ചു മതിയായിരുന്നു. എന്നാൽ ട്രെയിനിൻെറ വേഗം എന്തായിരുന്നു.

24. ഒരു സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ 75 മൈൽ ദൂരം ഒരു ക്ലിപ്തവേഗത്തിൽ യാത്ര ചെയ്യുന്നു. മണിക്കൂറൊന്നിനു് 3 മൈൽ കുറച്ചു് യാത്ര ചെയ്തിരുന്നെങ്കിൽ ആകെ സമയം 1 മ. 15 മി. കൂടുതൽ വേണമായിരുന്നു. എന്നാൽ അയാളുടെ വേഗം എന്തായിരുന്നു.

25. ഒരു വണ്ടിച്ചക്രത്തിൻെറ ചുററളവു് മറെറാന്നിൻെറ ചുററളവിനെക്കാൾ 4 അടി കൂടുതലാണു്. ഒരു മൈൽ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ വലിയ ചക്രം ചെറുതിനെക്കാൾ 220 പ്രാവശ്യം കുറച്ചേ കറങ്ങുകയുള്ളൂ. എന്നാൽ ഓരോ ചക്രത്തിൻെറ ചുററളവു കാണുക.

26. 36 ഗജം നീളവും 25 ഗജം വീതിയുമുള്ള ഒരു തോട്ടത്തിനകത്തു് നാലുചുററും ഒരേ വീതിയിൽ പാതയുണ്ടു്. പാതയൊഴിച്ചുള്ള സ്ഥലത്തിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം 672 ച. ഗ. ആയാൽ പാതയുടെ വീതി കാണുക.

27. ഒരാൾ ഒരു സ്ഥലത്തുനിന്നു തിരിച്ചു് ഒരു ക്ലിപ്തവേഗത്തിൽ

105 മൈൽ ദൂരം സഞ്ചരിച്ച് അതിൽ 2 മൈൽ കുറഞ്ഞ വേഗത്തിൽ പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്തേക്കു മടങ്ങുകയും ചെയ്യുന്നു. മടക്കയാത്രയ്ക്കു വേണ്ടി വന്ന സമയം ആദ്യയാത്രയ്ക്കു വേണ്ടി വന്നതിനെക്കാൾ 6 മ. കൂടുതലാണെങ്കിൽ ആദ്യയാത്രയിലെ വേഗം എന്തായിരുന്നു.

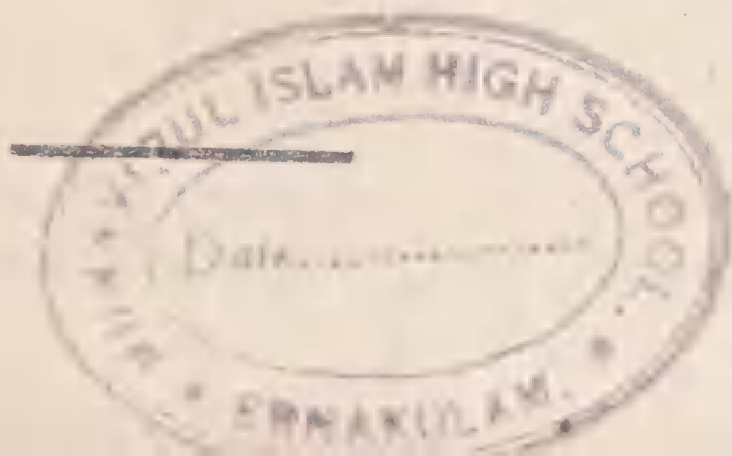
28. ഒരു ചതുരക്ഷേത്രത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 14 അടിയും അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 275 ച. അടിയും ആകുന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ നീളവും വീതിയും ചുററളവിന്റെ പകുതിയും കാണുക.

29. ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തോട്ടത്തിന്റെ ചുററളവ് 76 ഗജം. നീളത്തിൽ 7 ഗജം കൂട്ടുകയും വീതിയിൽ 6 ഗജം കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ വിസ്തീർണ്ണം പകുതിയായി കുറയുന്നു. എന്നാൽ തോട്ടത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നീളവും വീതിയും എത്ര.

30. ഒരു മോട്ടാർ വാഹനത്തിലെ ഓരോ സീററിനും 6 അ. 3 ഇ. വീതം നീളമുണ്ട്. ഒരു സീററിൽ ഉദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ളതിൽ കൂടുതലായി ഒരാളെക്കൂടി ഇരുത്തിയാൽ ഓരോ യാത്രക്കാരനും ഇരിക്കാനുള്ള സ്ഥലം $2\frac{1}{2}$ ഇ. കുറഞ്ഞുപോകും. എന്നാൽ ഓരോ സീററും എത്ര യാത്രക്കാർക്കാണ് ഉദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ളത്.

31. ഒരു ആയതക്ഷേത്രത്തിന്റെ (rectangle) നീളം 18 ഗജവും വീതി 12 ഗജവും ആകുന്നു. ഇതിനു ചുററും പുറമെയായി ഒരേ വീതിയിലുള്ള ഒരു പാതയുണ്ട്. പാതയുടെ വിസ്തീർണ്ണം ആയതക്ഷേത്രത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തോടു തുല്യമാണെങ്കിൽ പാതയുടെ വീതി കാണുക.

32. ഒരാൾ ഒഴുക്കിനു നേരെ (down stream) 20 മൈൽ ദൂരം വെള്ളത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചിട്ട്, തിരിച്ച് ആദ്യത്തെ സ്ഥലത്തേക്കുവന്നെത്തുന്നതിന് $6\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ വേണ്ടിവരുന്നു. ഒഴുക്കിനു നേരെയുള്ള അയാളുടെ ഗതിവേഗം ഒഴുക്കിനെതിരെയുള്ള ഗതിവേഗത്തെക്കാൾ മണിക്കൂറിൽ 3 മൈൽ കൂടുതൽ. എന്നാൽ ഒഴുക്കിനു നേരെയുള്ള ഗതിവേഗമെന്ത്.



അദ്ധ്യായം IX

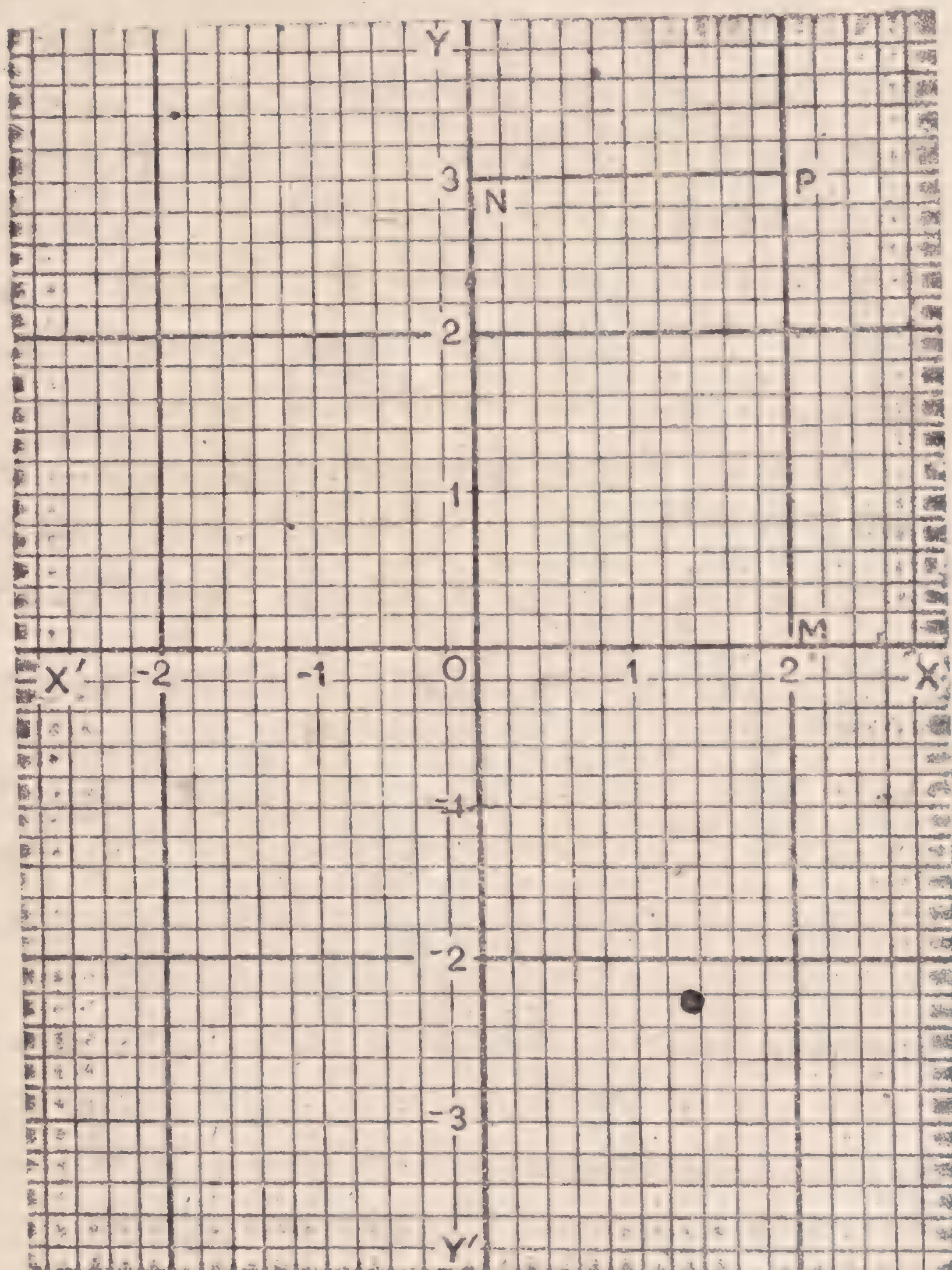
അക്ഷഗണിതം

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകളുടെയും മററും രൂപം ഗ്രാഫ്പേപ്പറിൽ ചിത്രണംചെയ്യുന്നതു് അക്ഷഗണിതം എന്ന ഗണിതവിഭാഗത്തിലെ തത്വങ്ങൾ അനുസരിച്ചാണു്. പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു രേഖകളെയും അവയിൽനിന്നുള്ള ദൂരത്തെയും അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണു് ഈ തത്വങ്ങൾ പ്രതിപാദിക്കുന്നതു്.

മേല്പറഞ്ഞ രേഖകൾക്കു് അക്ഷരേഖകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇടത്തുനിന്നു വലത്തോട്ടു കിടക്കുന്ന രേഖ പാദരേഖ അല്ലെങ്കിൽ പാദാക്ഷം; മുകളിൽനിന്നു താഴോട്ടുള്ളതു് ഊർദ്ധ്വരേഖ അല്ലെങ്കിൽ ഊർദ്ധ്വാക്ഷം. അവയുടെ സന്ധിസ്ഥാനത്തിനു 'കേന്ദ്രം' എന്നു പേർ. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് ഇടത്തോട്ടും വലത്തോട്ടുമുള്ള ദൂരം പാദം; മുകളിലോട്ടും താഴോട്ടുമുള്ള ദൂരം ഉയരം. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് ഇടത്തോട്ടുള്ള ദൂരത്തിനു് ന്യൂനചിഹ്നവും വലത്തോട്ടുള്ള ദൂരത്തിനു് അധികചിഹ്നവും കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. അതുപോലെ മുകളിലോട്ടുള്ള ദൂരത്തിനു് അധികവും താഴോട്ടുള്ള ദൂരത്തിനു ന്യൂനവും.

അക്ഷരേഖകളിൽ ഒരു ക്ലിപ്തമായ തോതുവെച്ചു് 1, 2, 3 എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. തോതു രണ്ടുവിധത്തിൽ കുറിക്കാം. 1 ഇഞ്ചു = 5 എന്നാണെങ്കിൽ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് 1 ഇഞ്ചു്, 2 ഇഞ്ചു്, 3 ഇഞ്ചു് എന്നിങ്ങനെയുള്ള ദൂരത്തിൽ 5, 10, 15 എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം വരുന്നു. തോതിനു് യൂണിററു് എന്നും പറയാം. തോതു് = ·2 ഇഞ്ചു് എന്നാണെങ്കിൽ ·2 ഇഞ്ചു്, ·4 ഇഞ്ചു്, ·6 ഇഞ്ചു് എന്നിങ്ങനെയുള്ള ദൂരത്തിൽ 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം വരുന്നു. 1 ഇഞ്ചു = 5 എന്നായാലും തോതു് = ·2 ഇഞ്ചു് എന്നായാലും അർത്ഥം ഒന്നുതന്നെയാണു്. കേന്ദ്രത്തിൽ

നിന്നു് വലത്തോട്ടും മുകളിലോട്ടുമുള്ള സംഖ്യകൾക്കു് അധിക ചിഹ്നവും ഇടത്തോട്ടും താഴോട്ടുമുള്ള സംഖ്യകൾക്ക ന്യൂനചിഹ്നവും ഉണ്ടായിരിക്കണം. കേന്ദ്രം എപ്പോഴും ശൂന്യത്തിന്റെ സ്ഥാനമാണു്.



പാദരേഖയ്ക്കു് X'X എന്നും ഊർദ്ധ്വാധരരേഖയ്ക്കു് Y'Y എന്നും കേന്ദ്രത്തിന്നു് O എന്നുമാണു പേർ കുറിക്കേണ്ടതു്. അക്ഷരേഖകളുടെ ഇടയ്ക്കു് നാലു ചതുരഖണ്ഡങ്ങളുണ്ടു്. XOY, YOX', X'OY',

Y'OX ഇവയ്ക്കു ക്രമത്തിൽ ഒന്നാം ചതുരഖണ്ഡം, രണ്ടാം ചതുരഖണ്ഡം മൂന്നാം ചതുരഖണ്ഡം, നാലാം ചതുരഖണ്ഡം എന്നു പറയുന്നു.

P ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദു. PM, PN ഇവ പാദരേഖയിലേക്കും ഊർദ്ധ്വരേഖയിലേക്കുമുള്ള ദൂരം കാണിക്കുന്ന ചതുരരേഖകൾ. അവയ്ക്കു് P യുടെ അക്ഷാംശങ്ങൾ എന്നു പേർ. OM, NP ഇവ രണ്ടും ഊർദ്ധ്വരേഖയിൽനിന്നു് P ലേക്കുള്ള ദൂരമാണു്; അതിനു P യുടെ പാദം എന്നു പേർ. അതായതു് O ൽനിന്നു് പാദരേഖയിൽകൂടി പോയാൽ P യുടെ നേക്കു് എത്തുന്നതിനുള്ള ദൂരം. MP, ON ഇവ രണ്ടും പാദരേഖയിൽനിന്നു് P ലേയ്ക്കുള്ള ദൂരമാണു്. അതിനു P യുടെ ഉയരം എന്നു പേർ. അതായതു് O ൽനിന്നു് ഊർദ്ധ്വരേഖയിൽകൂടി പോയാൽ P യുടെ നേക്കു് എത്തുന്നതിനുള്ള ദൂരം. ഇതുപോലെ ഏതു ബിന്ദുവിനും രണ്ടു് അക്ഷാംശങ്ങൾ ഉണ്ടു്; ഒന്നു പാദവും മറേറതു് ഉയരവും.

ഒന്നാം ചതുരഖണ്ഡത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം കേന്ദ്രത്തിനു് അഥവാ, ഊർദ്ധ്വരേഖയ്ക്കു വലതുവശം കിടക്കുന്നതുകൊണ്ടു് അവയുടെയെല്ലാം പാദം അധികചിഹ്നമുള്ളതാണു്. അതുപോലെ ആ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രത്തിനു് അഥവാ പാദരേഖയ്ക്കു മുകളിലായതുകൊണ്ടു് അവയുടെയെല്ലാം ഉയരവും അധികചിഹ്നമുള്ളതാണു്. ഇങ്ങനെ ആലോചിച്ചുനോക്കിയാൽ മററു ഖണ്ഡങ്ങളിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ അക്ഷാംശങ്ങൾ അധികമോ ന്യൂനമോ എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. രണ്ടാം ഖണ്ഡത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ പാദം ന്യൂനവും ഉയരം അധികവും; മൂന്നാംഖണ്ഡത്തിൽ പാദവും ഉയരവും ന്യൂനം; നാലാംഖണ്ഡത്തിൽ പാദം അധികവും ഉയരം ന്യൂനവും.

രണ്ടു് അക്ഷാംശങ്ങൾകൊണ്ടു് ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ സ്ഥാനം നിർണ്ണയിക്കാം. (2, 3) എന്നു് എഴുതിയാൽ പാദം 2, ഉയരം 3 എന്നീ അക്ഷാംശങ്ങളുള്ള ബിന്ദു എന്നാണർത്ഥം. ആദ്യം കുറിക്കുന്ന അക്ഷാംശം പാദവും രണ്ടാമത്തേതു് ഉയരവുമാണു്. അക്ഷരേഖ

കളുടെ തോതും കൂടി കല്പിച്ചാൽ ഈ ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യാം. രേഖകൾ രണ്ടിലും തോതു് ·5″ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. പാദരേഖയിൽ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് ·5″ വീതം ദൂരത്തിൽ 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെ വലത്തോട്ടും — 1, — 2, — 3 എന്നിങ്ങനെ ഇടത്തോട്ടും സ്ഥാനം കുറിക്കണം. അതുപോലെ ഊർദ്ധ്വരേഖയിലും കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് ·5″ വീതം ദൂരത്തിൽ 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെ മുകളിലോട്ടും — 1, — 2, — 3 എന്നിങ്ങനെ താഴോട്ടും സ്ഥാനം കുറിക്കണം. ഇങ്ങനെ സ്ഥാനം കുറിച്ചിരുന്നാൽ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും അക്ഷാംശങ്ങൾ നോക്കിക്കാണുവാൻ എളുപ്പമുണ്ടു്. പാദരേഖയിൽ ബിന്ദുവിന്റെ നേക്കുള്ള സ്ഥാനം പാദവും ഊർദ്ധ്വരേഖയിൽ ബിന്ദുവിന്റെ നേക്കുള്ള സ്ഥാനം ഉയരവും ആയിരിക്കും. പാദരേഖയിലെ 2 ന്റെ നേക്കും ഊർദ്ധ്വരേഖയിലെ 3 ന്റെ നേക്കും വരുന്ന ബിന്ദുവാണു് (2, 3) എന്നു കുറിക്കേണ്ട ബിന്ദു.

പാദം പൂജ്യമായിരുന്നാൽ ബിന്ദു കേന്ദ്രത്തിനു നേരേ താഴെയോ മുകളിലോ വരും. ഉയരം പൂജ്യമായിരുന്നാൽ ബിന്ദു കേന്ദ്രത്തിനു നേരേ ഇടത്തോ വലത്തോ വരും. (0,0) എന്നതു് കേന്ദ്രം തന്നെയാണു്.

ബിന്ദുക്കളുടെ പാദത്തിനു് x എന്നും ഉയരത്തിനു് y എന്നുമുള്ള ബീജസംഖ്യകൾ സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവയ്ക്കു് ഏതെങ്കിലും ബീജാർത്ഥം കല്പിച്ചാൽ അങ്ങനെയുള്ള ഒരുജോടി ബീജാർത്ഥത്തിന്റെ ചിത്രം ഒരു ബിന്ദുവാണു്. $x = 2, y = 3$ ഇവ രണ്ടുംകൂടിയാണു് ഒരു ജോടി ബീജാർത്ഥം എന്നു പറയുന്നതു്. അതു് (2 , 3) എന്ന ബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതായി ഗണിക്കണം.

$x - 2y = 4$ എന്ന സമവാക്യം x, y എന്ന ബീജങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഒരു് കെട്ടുബന്ധത്തെ കുറിക്കുന്നു. ഒരു ബീജത്തിനു് ഏതെങ്കിലും ഒരു് അർത്ഥം കല്പിച്ചാൽ മറേറതു് എത്രയെന്നു കണക്കാക്കാം. $x = 6$ ആയാൽ $y = 1$; $y = -3$ ആയാൽ $x = -2$;

ഇങ്ങനെ അനവധി ജോടി ബീജാർത്ഥം കണ്ടുപിടിക്കാം. അവയുടെ ഒരു പട്ടികയാണു താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു്.

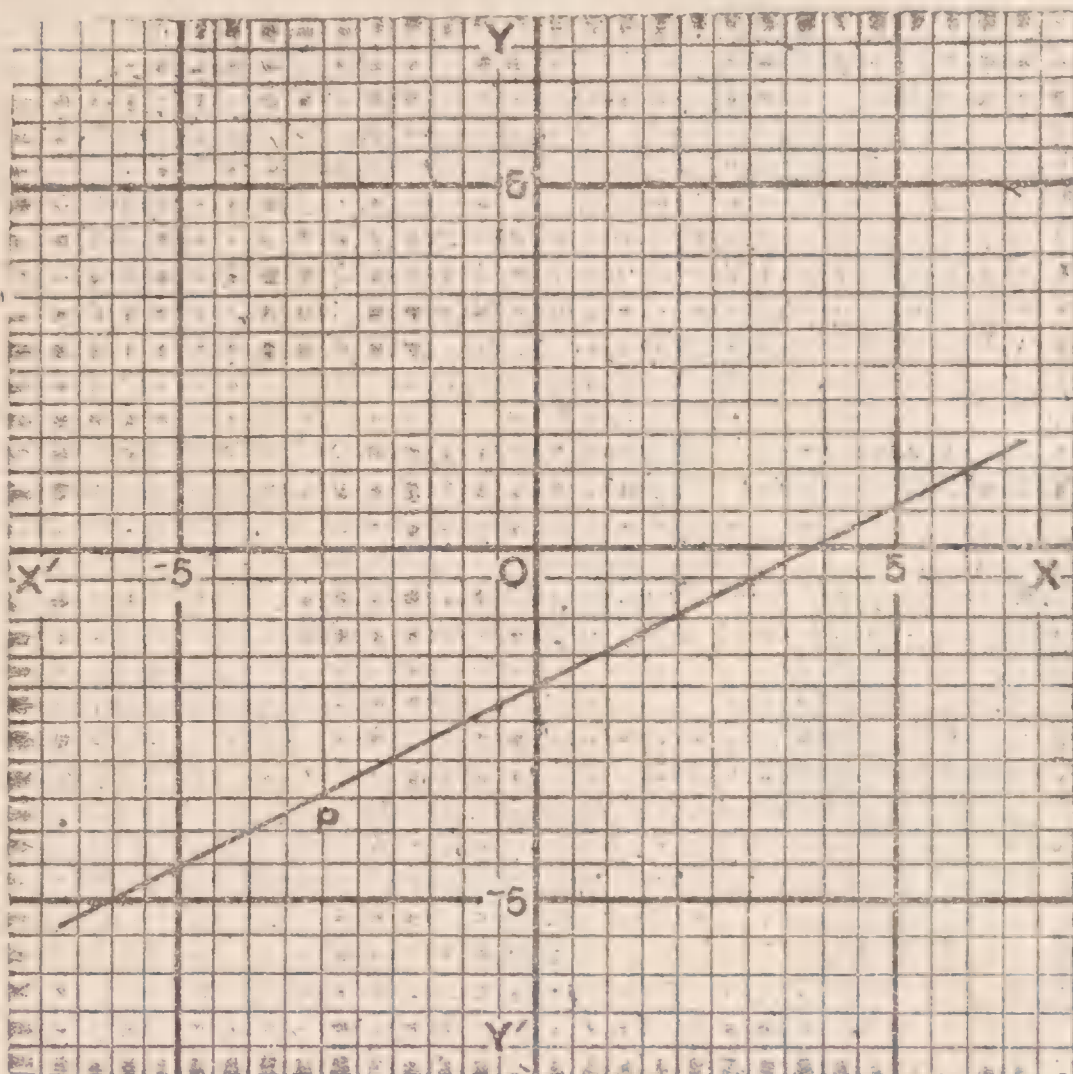
x	6	-2	0	4	2
y	1	-3	-2	0	-1

ഇതിൽ ഓരോ ജോടിയും ഓരോ ബിന്ദുവിനെ കുറിക്കുന്നു; അതായതു് $(6,1)$, $(-2, -3)$, $(0, -2)$ മുതലായവ. ഈ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിനോക്കിയാൽ എല്ലാം ഒരേ രേഖയിൽ കിടക്കുന്നതായി കാണാം. അതുകൊണ്ടു് രണ്ടു ബീജങ്ങളുള്ളതും അവയുടെ വർഗ്ഗമോ അതിൽ കൂടിയ ഡിഗ്രിയോ വരാത്തതും ആയ ഒരു സമവാക്യം അക്ഷഗണിതത്തിൽ ഒരു രേഖയെ കുറിക്കുന്നു. അഥവാ അക്ഷഗണിതത്തിലെ ഒരു രേഖ മേൽപ്പറഞ്ഞപ്രകാരമുള്ള ഒരു ബീജദ്വയ സമവാക്യത്തിൻെറ ചിത്രമാണു്. ഒരു സമവാക്യത്തിൻെറ ചിത്രം നിർമ്മിക്കുന്നതിനു മേൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നവണ്ണം ബീജാർത്ഥങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടിക തയാറാക്കി ഓരോ ജോടി അർത്ഥവും ഓരോ ബിന്ദുവായി അടയാളപ്പെടുത്തി അവയിൽക്കൂടി ഒരു രേഖ വരയ്ക്കണം.

$x - 2y = 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിൻെറ ചിത്രമാണു് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു്. അതിൽ $\cdot 2''$ തോതായി എടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഈ സമവാക്യത്തിനു യോജിച്ചതായി ഏതു ജോടി ബീജാർത്ഥം എടുത്താലും അതിൻെറ ചിത്രം ഈ രേഖയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവായിരിക്കും. അതുപോലെ ഈ രേഖയിലുള്ള ഏതു ബിന്ദുവിൻെറയും അക്ഷാംശങ്ങൾ ഈ സമവാക്യത്തിനു യോജിച്ച ഒരു ജോടി ബീജാർത്ഥമായിരിക്കും.

ഉദാ:— P യുടെ പാദം $= -3$, ഉയരം $= -3\frac{1}{2}$. $x = -3$, $y = -3\frac{1}{2}$ ഈ ബീജാർത്ഥങ്ങൾ സമവാക്യത്തിൽ ചേർക്കുമ്പോൾ $-3 - 2(-3\frac{1}{2}) = -3 + 7 = 4$ എന്നു കിട്ടുന്നു.



$x - 2y = 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ രാശികളെ ഇടംവലം മാററിയാൽ $y = \frac{x - 4}{2}$ എന്നായിത്തീരും. ഇതുപോലെ ഏതു സമവാക്യവും ഇടതുവശത്തു് y മാത്രമായുള്ള രൂപത്തിലാക്കാം. അതുകൊണ്ടു് $x - 2y = 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ചിത്രം $\frac{x - 4}{2}$ എന്ന രാശിമാലയുടെ ചിത്രമായും ഗണിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യവും രാശിമാലയും അക്ഷഗണിതത്തിൽ ഒന്നുതന്നെയാണു്.

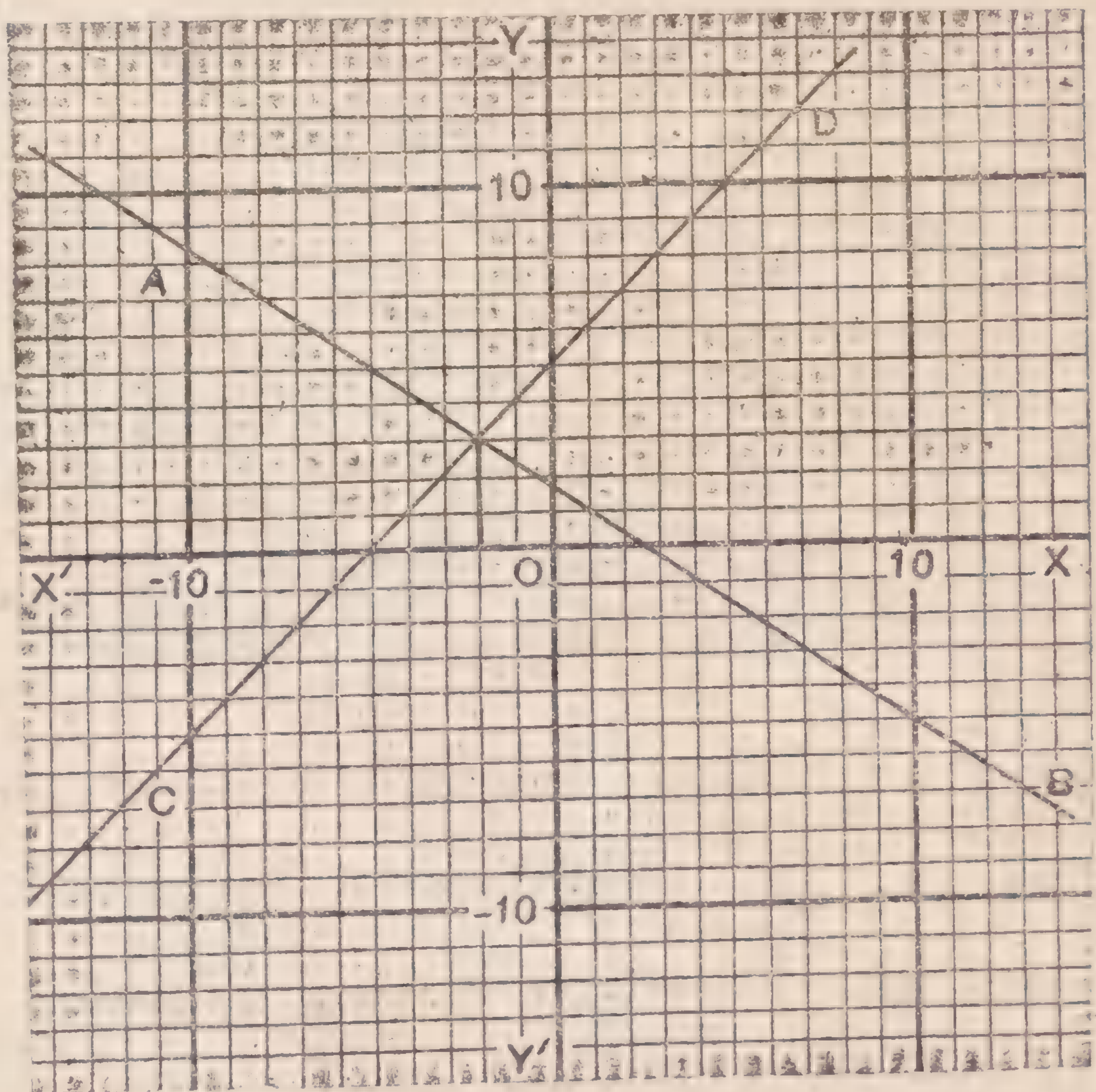
$\frac{-2x + 5}{3}$, $x + 5$ എന്ന രാശിമാലകളുടെ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

$$y = \frac{-2x+5}{3}$$

x	1	4	−2	−5
y	1	−1	3	5

$$y = x + 5$$

x	0	−5	5	−10
y	5	0	10	−5



AB യുടെ രാശിമാല $\frac{-2x+5}{3}$; സമവാക്യം $y = \frac{-2x+5}{3}$ അല്ലെങ്കിൽ $2x+3y=5$. CD യുടെ രാശിമാല $x+5$; സമവാക്യം $y=x+5$ അല്ലെങ്കിൽ $x-y=-5$.

AB യിലുള്ള ഏതു ബിന്ദുവിൻെറയും അക്ഷാംശങ്ങൾ $2x+3y=5$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു യോജിച്ച ബീജാൎത്ഥങ്ങളാണ്.

അതുപോലെ CD യിലുള്ള ഏതു ബിന്ദുവിൻെറയും അക്ഷാംശങ്ങൾ $x-y=-5$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു യോജിച്ച ബീജാൎത്ഥങ്ങളുമാണു്. രണ്ടു രേഖകളുടെയും സന്ധിയാണു് P; അതിൻെറ അക്ഷാംശങ്ങൾ $x=-2$, $y=3$; ഇതു് രണ്ടു സമവാക്യത്തിനും യോജിച്ച ബീജാൎത്ഥങ്ങളായിരിക്കും. അതായതു് അവയെ അന്യോന്യസമവാക്യങ്ങളായി ഗണിച്ചു് നിൎദ്ധാരണം ചെയ്താൽ $x=-2$, $y=3$ എന്ന ബീജാൎത്ഥങ്ങളായിരിക്കും കിട്ടുന്നതു്. അക്ഷഗണിതപ്രകാരം അന്യോന്യസമവാക്യങ്ങളെ നിൎദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന രീതി ഇതാണു്. സമവാക്യങ്ങളുടെ രേഖ വരച്ചു് രണ്ടും സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൻെറ അക്ഷാംശങ്ങൾ അളന്നെടുത്താൽ അവ ബീജാൎത്ഥങ്ങളായിരിക്കും.

$2x + 3y = 5$, $x - y = -5$ ഈ അന്യോന്യസമവാക്യങ്ങളെ $y = \frac{-2x+5}{3}$, $y=x+5$ എന്ന രൂപത്തിലും എഴുതാം.

അതുകൊണ്ടു് $\frac{-2x+5}{3} = x + 5$ എന്ന ആദിസമവാക്യം നിൎദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ബീജാൎത്ഥം അന്യോന്യസമവാക്യങ്ങളുടെ ബീജാൎത്ഥം തന്നെയാണു്. ആദിസമവാക്യത്തെ അക്ഷഗണിതപ്രകാരം നിൎദ്ധാരണംചെയ്യുന്നതിനുള്ള രീതി ഇതിൽനിന്നു സിദ്ധിക്കുന്നു. ആദിസമവാക്യത്തിലെ ഓരോ സമഭാഗത്തിൻെറയും ചിത്രം വരച്ചു് അവ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൻെറ പാദം അളന്നെടുക്കണം.

$$6 - 2x = \frac{x+2}{2}$$

$y = 6 - 2x$, $y = \frac{x+2}{2}$ ഇവയുടെ ചിത്രം വരച്ചാൽ അവ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൻെറ പാദം $x = 2$ എന്നു കിട്ടും. അതാണു് സമവാക്യത്തിലെ ബീജാൎത്ഥം.

y വരാത്ത സമവാക്യങ്ങൾ $x = 4$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കുമല്ലൊ. ബീജാത്ഥങ്ങളുടെ പട്ടിക തയാറാക്കിയാൽ ഓരോ ജോടിയിലും $x = 4$ എന്നു തന്നെ കിട്ടും; y എത്രവേണമെങ്കിലുമാകാം. അതുകൊണ്ടു് $x = 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ചിത്രം ഊർദ്ധ്വരേഖയ്ക്കു സമാന്തരമായി വലതുവശത്തുള്ള ഒരു രേഖയാണു്. അതിന്റെ ദൂരം 4 ആയിരിക്കും. $x = -4$ എന്നാണെങ്കിൽ രേഖ ഇടതുവശത്തു വരും.

x വരാത്ത സമവാക്യങ്ങൾ $y = 6$, $y = -6$ ഈ രൂപത്തിലായിരിക്കും. അതിന്റെ ചിത്രം പാദരേഖയ്ക്കു സമാന്തരമായി മുകളിലോ താഴെയോ വരുന്ന രേഖയാണു്.

$x = 0$ എന്നതു് ഊർദ്ധ്വരേഖയുടെയും $y = 0$ എന്നതു് പാദരേഖയുടെയും സമവാക്യമാണു്.

ബീജങ്ങൾ മാത്രമുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ $3x = 5y$, $3x - 5y = 0$ ഈ രൂപത്തിലായിരിക്കും. ഇതിൽ x പൂജ്യമായാൽ y യും പൂജ്യമായിരിക്കും. അതായതു് $(0,0)$ എന്ന കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടിയാണു് രേഖ കടന്നുപോകുന്നതു്.

അഭ്യാസം 32

1. ·1″ തോതാക്കി ഒരു ചിത്രം വരച്ചു് അതിൽ താഴെപ്പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(8,9) (−6,12) (−11,−4) (3,−10) (7,0) (−2,0) (0,5) (0,−8) (0,0) (14,9).

2. ·2″ തോതാക്കി ഒരു ചിത്രം വരച്ചു് അതിൽ താഴെപ്പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(7,5) (4,−8) (−6,6) (−8,−2) (0,5) (−9,0) (0,0) (10,0) (0,−10) (−7,5).

3. 1″ തോതാക്കി ഒരു ചിത്രം വരച്ച് അതിൽ താഴെപ്പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(0,·7) (1·3, −·5) (·4,1·2) (−·8,0) (−1·1, −1) (1·4,0) (0, −1·6) (0,0) (−·1,1) (−1·7, −·9).

4. ·5″ തോതാക്കി ഒരു ചിത്രം വരച്ച് അതിൽ താഴെപ്പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(−3,0) (2·8,0) (−1·6,·8) (·4, −2·4) (0,1·2) (0, −·8) (1·4,2·2) (−·6, −1) (0,0) (·8, −1·8).

5. 1″ = 10 എന്ന തോതിൽ ഒരു ചിത്രം വരച്ച് അതിൽ $y = 3x$, $y = 3x + 7$, $y = 3x - 4$ ഈ സമവാക്യങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുക.

6. 1″ = 5 എന്ന തോതിൽ ഒരു ചിത്രം വരച്ച് അതിൽ $2y = x + 7$, $2y = -x + 7$ ഇവയുടെ ചിത്രം നിർമ്മിക്കുക.

7. 1″ = 2 എന്ന തോതിൽ ഒരു ചിത്രം വരച്ച് അതിൽ $x = 2{\cdot}4$, $x = -1{\cdot}8$, $y = {\cdot}6$, $y = -1{\cdot}4$ ഇവയുടെ ചിത്രം നിർമ്മിക്കുക.

8. ·1″ തോതിൽ $2y - 3x = 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിൻെറ ചിത്രം നിർമ്മിക്കുക. അതിൽ A, B എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി ഓരോന്നിൻെറയും അക്ഷാംശങ്ങൾ എഴുതുക.

9. ·2″ തോതിൽ $x + 4y + 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിൻെറ ചിത്രം നിർമ്മിക്കുക. അതിൽ - 2 ഉയരമുള്ള ബിന്ദുവിൻെറ പാദം കാണുക.

10. 1″ തോതിൽ $x = 2y + 1$ എന്ന സമവാക്യത്തിൻെറ ചിത്രം നിർമ്മിക്കുക. അതിൽ $x = -{\cdot}4$ ൻെറ നേക്കുള്ള ബിന്ദുവിൻെറ ഉയരം കാണുക.

11. ·5″ തോതിൽ $y = 3(1 - x)$ എന്ന സമവാക്യത്തിൻ്റെ ചിത്രം നിർമ്മിക്കുക. അതിൽ −·6 പാദമുള്ള ബിന്ദുവിൻെറ ഉയരവും −·6 ഉയരമുള്ള ബിന്ദുവിൻെറ പാദവും കാണുക.

12. 1″ = 1 എന്ന തോതിൽ $\frac{-3x+1}{5}$ ൻെറ ചിത്രം നിർമ്മിക്കുക. അതിൽ $x = -1{\cdot}5$ ന നേക്കുള്ള ബിന്ദുവിൻെറ ഉയരം കാണുക.

13. $1'' = 10$ എന്ന തോതിൽ $\frac{2x+7}{3}$ ന്റെ ചിത്രം നിൎമ്മിക്കുക. അതിൽ $y = -9$ ന നേൎക്കുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ പാദം കാണുക.

താഴെ കാണുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ അക്ഷഗണിതപ്രകാരം നിൎദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

14. $y = 2x-1; \quad 6y = 2x-3$ (തോതു് $=1''$)

15. $\frac{x+y}{3} = 5; \quad \frac{3x-2y}{5} + 1 = 0$ (തോതു് $= \cdot 1''$)

16. $9x-7 = 13-x$ (തോതു് $= \cdot 1''$)

17. $5x+y = 0; \quad 3x+y = 4$ (തോതു് $= \cdot 2''$)

18. $y+3 = 0; \quad 6y+5x = 7$ (തോതു് $= \cdot 5''$)

19. $\frac{5x-2}{3} = \frac{-x+16}{2}$ (തോതു് $= 1''$)

അദ്ധ്യായം X

ക്ഷേത്രഗണിതം: പ്രാരംഭം

ക്ഷേത്രഗണിതത്തിൽ വാക്യപ്രകരണമെന്നും ക്രിയാപ്രകരണമെന്നും രണ്ടു വിഭാഗങ്ങളുണ്ടു്. ക്ഷേത്രഗണിതത്തിലെ പ്രമാണങ്ങൾ സമൎത്ഥിക്കുകയാണു് വാക്യപ്രകരണത്തിൽ ചെയ്യുന്നതു്. ക്രിയാപ്രകരണത്തിൽ അവയുടെ പ്രയോഗമനുസരിച്ചുള്ള ക്രിയകൾ വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

നിൎവ്വചനങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചു് പ്രമാണങ്ങൾ സിദ്ധിക്കുന്നു. പ്രമാണങ്ങൾ എഴുതുന്നതു വാക്യരൂപത്തിലാണു്. കാൎയ്യകാരണസഹിതം ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കേണ്ട പ്രമാണങ്ങളെയാണു്

വാക്യം എന്നു പറയുന്നതു്. തെളിവൊന്നും കൂടാതെതന്നെ ശരിയാണെന്നു സ്പഷ്ടമാകുന്ന പ്രമാണങ്ങൾക്കു പ്രത്യക്ഷവാക്യം എന്നു പേർ. ഒരു വാക്യത്തെ ആശ്രയിച്ചുനില്ക്കുന്ന പ്രമാണത്തിനു് ഉപവാക്യമെന്നും പറയാം. ഒരു വാക്യത്തിലെ പ്രമാണം മറിച്ചെടുക്കുന്നതു് പ്രതിലോമവാക്യം.

ഒരു ക്ഷേത്രത്തിൻെറ മൗലികഘടകങ്ങൾ ബിന്ദു, രേഖ, കോൺ ഇവയാണു്. രേഖയെന്നു പറയുമ്പോൾ സാധാരണയായി ഋജുരേഖയെന്നാണ് അർത്ഥം. വക്രരേഖയാണെങ്കിൽ അതിനു് ക്ലിപ്തമായ ഒരു രൂപമുണ്ടെങ്കിൽ മാത്രമേ പ്രമാണങ്ങൾക്കു വിധേയമാവുകയുള്ളു. അത്തരമൊരു വക്രരേഖയാണു വൃത്തം. വൃത്തത്തെ സംബന്ധിക്കുന്ന പ്രമാണങ്ങളാണ് ഈ പുസ്തകത്തിലെ പ്രതിപാദ്യം. ഋജുരേഖയെയും ഋജുരേഖകൊണ്ടുള്ള ക്ഷേത്രങ്ങളെയും പററിയുള്ള മുൻപ്രമാണങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് അവ തെളിയിക്കേണ്ടതു്. അതുകൊണ്ടു് അവയുടെ ചുരുക്കം താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

<u>സമാന്തരരേഖ.</u> ഒരേ രേഖയ്ക്കു സമാന്തരമായോ ചതുരമായോ വരയ്ക്കുന്ന മററു രേഖകൾ പരസ്പരം സമാന്തരമായിരിക്കും. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ ഒരു ഛേദരേഖ ഖണ്ഡിക്കുന്നതായാൽ തുല്യമായ സദൃശകോണുകളും, തുല്യമായ വിപരീതകോണുകളും ജോടിച്ചു വരും; കൂടാതെ ഒരേ വശത്തുള്ള അകത്തെ കോണുകളുടെ തുക രണ്ടു ചതുരക്കോണായിരിക്കും. പ്രതിലോമവാക്യമെടുത്താൽ രേഖകൾ സമാന്തരമായിരിക്കുമെന്നും സിദ്ധിക്കുന്നു.

<u>ത്രികോൺ.</u> രണ്ടു ത്രികോണിൽ ചില അളവുകൾ തുല്യമായി ജോടിച്ചു വന്നാൽ അവ സർവ്വസമമായിരിക്കും. (1) മൂന്നു ഭുജം; (2) രണ്ടു ഭുജവും ഇടക്കോണും; (3) ഒരു ഭുജവും രണ്ടു കോണും; ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നു മതി. ചതുരത്രികോണായാൽ (1) കർണ്ണവും ഒരു കോണും; (2) കർണ്ണവും ഒരു ഭുജവും; ഇതിലൊന്നു മതിയാകും.

ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണിൽ തുല്യമായ രണ്ടു ഭുജങ്ങളും രണ്ടു കോണുകളും ഉണ്ടു്.

ഒരു ത്രികോണിലെ മൂന്നു കോണുകളുടെ തുക രണ്ടു ചതുരക്കോണായിരിക്കും; ഒരു ഭുജം നീട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന പുറക്കോൺ അകത്തു് എതിർവശത്തുള്ള രണ്ടു കോണിന്റെ തുകയ്ക്കു തുല്യമായിരിക്കും. ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക കാണുന്നതിനു് അവയുടെ എണ്ണത്തെ ഇരട്ടിച്ചു് 4 കുറയ്ക്കണം; അത്രയും ചതുരക്കോണായിരിക്കും ആ കോണുകളുടെ തുക.

രേഖകളുടെയും കോണുകളുടെയും മദ്ധ്യഭാഗിനികളും ചതുരരേഖകളും വരയ്ക്കുക, ത്രികോണുകൾ നിർമ്മിക്കുക എന്നീ ക്രിയകൾ ഈ വിഭാഗത്തിൽപ്പെടുന്നു.

സമാന്തരചതുർഭുജം. ഒരു സമാന്തരചതുർഭുജത്തിൽ എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരവും തുല്യവുമാണു്; എതിർകോണുകളും തുല്യമാണു്; കർണ്ണങ്ങൾ സമാന്തരത്തെ സമമായി ഭാഗിക്കുന്നു; കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം അർദ്ധാംശിക്കുന്നു. ഒരു ചതുർഭുജത്തിൽ രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ സമമോ സമാന്തരമോ ആയാൽ, അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ സമവും സമാന്തരവുമായാൽ, അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടുജോടി എതിർകോണുകൾ തുല്യമായാൽ, അല്ലെങ്കിൽ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം അർദ്ധാംശിച്ചാൽ, ആ ക്ഷേത്രം ഒരു സമാന്തരചതുർഭുജമായിരിക്കും. ഒരു സമാന്തരചതുർഭുജത്തിൽ നാലു ഭുജവും തുല്യമായാൽ സമചതുർഭുജവും നാലു കോണും ചതുരക്കോണായാൽ ചതുരക്ഷേത്രവും രണ്ടുംകൂടിയായാൽ സമചതുരവും കിട്ടും. സമചതുർഭുജത്തിലെ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം അർദ്ധാംശിക്കുന്നതു കൂടാതെ എതിർകോണുകളെക്കൂടി അർദ്ധാംശിക്കുകയും പരസ്പരം ചതുരമായിരിക്കുകയും ചെയ്യും; ചതുരക്ഷേത്രത്തിലെ കർണ്ണങ്ങൾക്കു് ഈ ഗുണങ്ങളില്ല, എന്നാൽ അവയുടെ നീളം സമമായിരിക്കും. സമചതുരത്തിലെ കർണ്ണങ്ങൾക്കു് ഈ വിശേഷങ്ങളെല്ലാമുണ്ടു്.

മൂന്നു സമാന്തരരേഖകളുടെ ഇടയ്ക്കു് ഒരു ഛേദരേഖയിലുണ്ടാകുന്ന രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യമായാൽ അതുപോലെ മററേതൊരു ഛേദരേഖയിലും തുല്യമായ രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

ഒരു ത്രികോണിലെ രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ ചേർത്തു കിട്ടുന്ന രേഖ മൂന്നാമത്തെ ഭുജത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമായിരിക്കും.

സമാന്തരം വരയ്ക്കുക, പലരൂപത്തിലുള്ള ചതുർഭുജങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുക, രേഖകളെ തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക മുതലായവ ഈ പ്രമാണങ്ങളെ ആസ്പദമാക്കിയുള്ള ക്രിയകളാണു്.

<u>വിസ്തീർണ്ണം.</u> വിസ്തീർണ്ണത്തെപ്പററിയുള്ള നിയമങ്ങൾ ഈ പുസ്തകത്തിലെ ഒന്നാം അദ്ധ്യായത്തിൽ സൂത്രവാക്യങ്ങളായി കൊടുത്തിട്ടുണ്ടു്. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾക്കിടയ്ക്കു നില്ക്കുന്ന ക്ഷേത്രങ്ങളുടെ ഉയരം തുല്യമായിരിക്കുമെന്നുള്ള തത്വത്തെ ആസ്പദമാക്കിയാണു് വിസ്തീർണ്ണത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള വാക്യങ്ങൾ രചിച്ചിട്ടുള്ളതു്.

ഒരു ചതുരത്രികോണിന്റെ കർണ്ണം ഭുജമാക്കി നിർമ്മിക്കുന്ന സമചതുരം മററു രണ്ടു വശങ്ങൾ ഭുജമാക്കി നിർമ്മിക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കു തുല്യമാണു്.

കർണ്ണം $= c$, മററു ഭുജങ്ങൾ $= a, b$; $\therefore a^2 + b^2 = c^2$.

ഭുജങ്ങളുടെ അളവുകൾ ഈ സൂത്രവാക്യത്തിനൊത്തു വന്നാൽ c യ്ക്കു് എതിരെയുള്ള കോൺ ചതുരക്കോണായിരിക്കുമെന്നു് പ്രതിലോമവാക്യപ്രകാരം സിദ്ധിക്കുന്നു.

ചെറുകോണിനും പെരുങ്കോണിനും എതിരെയുള്ള ഭുജങ്ങളുടെ വർഗ്ഗം കണക്കാക്കുന്നതിനും വാക്യങ്ങളുണ്ടു്.

ചതുർഭുജത്തിനു തുല്യമായി ത്രികോൺ നിർമ്മിക്കുക, ത്രികോണിനു തുല്യമായി ചതുരം നിർമ്മിക്കുക മുതലായ ക്രിയകൾ വിസ്തീർണ്ണം സംബന്ധിച്ചുള്ള ക്രിയാപ്രകരണത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു.

<u>ലോക്കസ് അല്ലെങ്കിൽ ബിന്ദുപഥം.</u> ചില നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന് ചരബിന്ദു എന്നും അതിൻെറ മാർഗ്ഗരേഖയ്ക്കു് ലോക്കസ് എന്നും പറയുന്നു. ഒരു സ്ഥിരബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഒരു ക്ലിപ്തദൂരത്തിലിരിക്കണമെന്നുള്ള നിബന്ധനയാണെങ്കിൽ ലോക്കസ് ഒരു വൃത്തമായിരിക്കും. രണ്ടു സ്ഥിരരേഖകളിൽനിന്ന് ഒരു ക്ലിപ്തദൂരത്തിലിരിക്കണമെന്നാണെങ്കിൽ ലോക്കസ് രണ്ടു രേഖയായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 33

(S. S. L. C. Questions)

1 ഒരു ചതുരത്രികോണിലെ ഒരു കോൺ $30°$ ആണെങ്കിൽ അതിന് എതിരെ കിടക്കുന്ന ഭുജം കർണ്ണത്തിൻെറ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ABC ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണാണ്. $\angle B$, $\angle C$ ഇവ ഓരോന്നും $\angle A$ യുടെ ഇരട്ടിയാണ്. എന്നാൽ ഓരോ കോണിൻെറയും അളവു കാണുക.

CB നീട്ടി BA യ്ക്കു തുല്യമായി BD എടുത്ത് AD ചേർക്കുക. $\angle ADB = \angle BAC$ എന്നും $AD = DC$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

3. 10 ഇഞ്ചു ചുററളവിൽ $2 : 5 : 4$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ മൂന്നു ഭുജങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു ത്രികോൺ നിർമ്മിക്കുക.

4. രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ $4''$, $3{\cdot}6''$; കർണ്ണം $3''$; ഈ അളവിൽ ഒരു സമാന്തര ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുക.

5. $\triangle ABC$ ൽ $AB = 2''$, $BC = 3''$, $\angle B = 45°$. എന്നാൽ $AC^2 = 13 - 6\sqrt{2}$ ച. ഇ. ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

6. $\triangle ABC$ ൽ $\angle C = 90°$; $AC = CB$; $\angle A$ യുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനി BC യെ D ൽ സന്ധിക്കുന്നു. $AC + CD = AB$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. 5 അടി വീതിയുള്ള ഒരു റെയിൽപാളവും 3 അ. 4 ഇ. വീതിയുള്ള മറെറാരു റെയിൽപാളവും ഒരു സ്ഥലത്തുവെച്ചു് 45° കോണിൽ മറികടക്കുന്നു. മറികടക്കുന്ന ഭാഗത്തിൻെറ ഒരു പ്ലാൻ വരയ്ക്കുക.

8. ഒരു തെരുവിൽ 50 അടി നീളമുള്ള ഒരു ഏണി ഒരു വശത്തുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിൽ ചാരിവെച്ചിരിക്കുന്നു; അതു് 48 അ. പൊക്കംവരെ എത്തുന്നു. ഏണി അതേ സ്ഥാനത്തുതന്നെ നിർത്തി തെരുവിൽ മറുവശത്തേക്കു ചാരിവെച്ചാൽ ആ വശത്തു് 14 അ. പൊക്കംവരെ എത്തും. തെരുവിൻെറ വീതി കണക്കാക്കുക.

9. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle B$ യുടെയും $\angle C$ യുടെയും മദ്ധ്യഭാഗിനികൾ P ൽ സന്ധിക്കുന്നു. $\angle A + \angle D = 2 \angle BPC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

10. ഒരു ഗോപുരത്തിൻെറ മുകളിൽനിന്നു് തറയിൽ ഒരു സ്ഥാനത്തേക്കുള്ള കീഴ്കോൺ 45° യാണു്; അവിടെനിന്നു് 200 അടി താഴെയിറങ്ങി നോക്കിയാൽ ആ സ്ഥാനത്തിൻെറ കീഴ്കോൺ 30° ആയിരിക്കും. ഗോപുരത്തിൻെറ ചുവട്ടിൽനിന്നു് തറയിലുള്ള സ്ഥാനത്തേക്കു് എന്തു ദൂരമുണ്ടെന്നു കണക്കാക്കുക.

11. 100 അടി വീതിയുള്ള ഒരു റോഡിൻെറ ഇരുവശത്തു് ഒരേ പൊക്കമുള്ള രണ്ടു തൂണുണ്ടു്. അവയുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള ഒരു സ്ഥാനത്തുനിന്നു് തൂണുകളുടെ അററത്തേയ്ക്കുള്ള മേൽക്കോൺ 60° യും 30° യും ആണു്. തൂണുകളിൽനിന്നു് ആ സ്ഥാനത്തേക്കുള്ള ദൂരവും തൂണുകളുടെ പൊക്കവും കണക്കാക്കുക.

12. ABCD എന്ന സമാന്തരചതുർഭുജത്തിനകത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണു് P. $\triangle PAB + \triangle PCD = \frac{1}{2}$ ABCD എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. $\triangle ABC$ ൽ $AB = 2''$, $BC = 4''$; $\angle B = 60^\circ$. $\triangle ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണവും A ൽനിന്നു BC ലേക്കുള്ള ഉയരവും കണക്കാക്കുക.

14. ഒരു ബഹുഭുജത്തിൻെറ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണു്. ഓരോന്നും 160° ആയാൽ അതിനു് എത്ര ഭുജമുണ്ടു്.

15. $\triangle ABC$ ൽ $AB = AC$; P, BC യിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു; AHPK ഒരു സമാന്തരചതുർഭുജമായി വരത്തക്കവണ്ണം H, K ഇവ

AB ലും AC ലും ഉള്ള ബിന്ദുക്കൾ. PH + PK = AB എന്നു തെളിയിക്കുക.

16. ഒരു ഭുജം 6 സെ. മീ; ഒരു കോൺ 30°; വിസ്തീർണ്ണം 21 ച. സെ. മീ. ഈ അളവിൽ ഒരു സമാന്തരചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുക. മറേറ ഭുജം അളന്നെഴുതുക.

17. △ABC ൽ AB = 6 സെ. മീ; AC = 8 സെ. മീ; ∠A = 120°; BC യുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

18. എല്ലാ ഭുജങ്ങളും എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമായുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിനു 20 ഭുജങ്ങളുണ്ടു്. എന്നാൽ ഓരോ കോണിൻെറയും അളവു കണക്കാക്കുക.

19. ABC ഒരു സമഭുജത്രികോണമാണു്. ഓരോ ഭുജത്തിനും 3″ നീളമുണ്ടു്. AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽനിന്നു 2″ ദൂരത്തിലും AB ലും AC ലും നിന്നു തുല്യദൂരത്തിലും സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.

20. △ABC ൽ ∠A യുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനി BC യെ D ൽ സന്ധിക്കുന്നു. DA യ്ക്കു സമാന്തരമായി C ൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന രേഖയും BA നീട്ടി കിട്ടുന്ന രേഖയും P ൽ സന്ധിക്കുന്നു. AP = AC എന്നു തെളിയിക്കുക.

21. ഒരു ട്രപ്പീസിയത്തിൻെറ കർണ്ണങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ ചേർത്തു കിട്ടുന്ന രേഖ അതിൻെറ സമാന്തരഭുജങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

22. △ABC ൽ AB = 4·6″; BC = 4″. എന്നാൽ ∠C ഒരു ചതുരക്കോണോ അതിൽ ചെറുതോ വലുതോ എന്നു കണക്കാക്കി പറയുക. BC യ്ക്കു ലംബമായി AD വരച്ചാൽ CD യുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

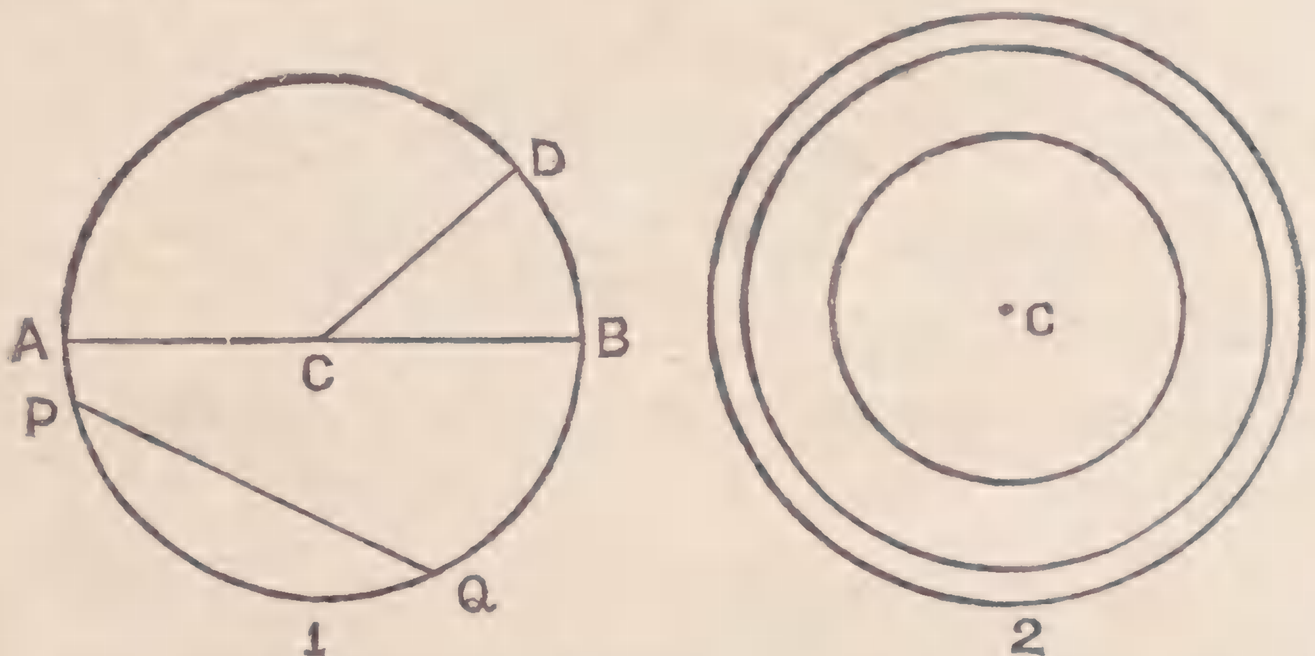
അദ്ധ്യായം XI

വൃത്തവും ജ്യാവും

ഒരു ക്ഌപ്തരൂപത്തിലുള്ള വക്രരേഖയാണ് വൃത്തം അല്ലെങ്കിൽ സർക്കിൾ.

<u>നിർവചനം.</u> ഒരു ക്ഌപ്തബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഒരേ ദൂരത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ചേൎന്നുണ്ടാകുന്ന രേഖയ്ക്കു വൃത്തം എന്നു പേർ. ആ ക്ഌപ്തബിന്ദുവിന്ന് സെൻറർ അല്ലെങ്കിൽ കേന്ദ്രമെന്നും ആ ദൂരത്തിന്ന് റേഡിയസ് അല്ലെങ്കിൽ ആരം എന്നും പറയുന്നു. ആരത്തിന്നു വ്യാസാർദ്ധം എന്നും പേരുണ്ട്.

വൃത്തം എന്നു പറയുമ്പോൾ സാധാരണ മേല്പറഞ്ഞ വക്രരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിലും ചിലപ്പോൾ അതിന്നകത്തുള്ള ക്ഷേത്രത്തിന്നും വൃത്തമെന്നു പറയാറുണ്ട്. രേഖയെ മാത്രം പ്രത്യേകം സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന്നു പരിധി എന്നോ വലയം എന്നോ പറയാവുന്നതുമാണ്.



സെൻററിൽകൂടി പരിധിമുതൽ പരിധിവരെ നീണ്ടുകിടക്കുന്ന രേഖയ്ക്കു് വ്യാസം അല്ലെങ്കിൽ ഡയമെറ്റർ എന്നു പേർ.

സെന്ററിൽനിന്നു പരിധിയിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന രേഖകളെല്ലാം തുല്യമായിരിക്കും; അവയെല്ലാം റേഡിയസ്സാണ്. മേൽ കാണുന്ന ചിത്രത്തിൽ C സെന്ററും CD റേഡിയസ്സും AB ഡയമററുമാണ്.

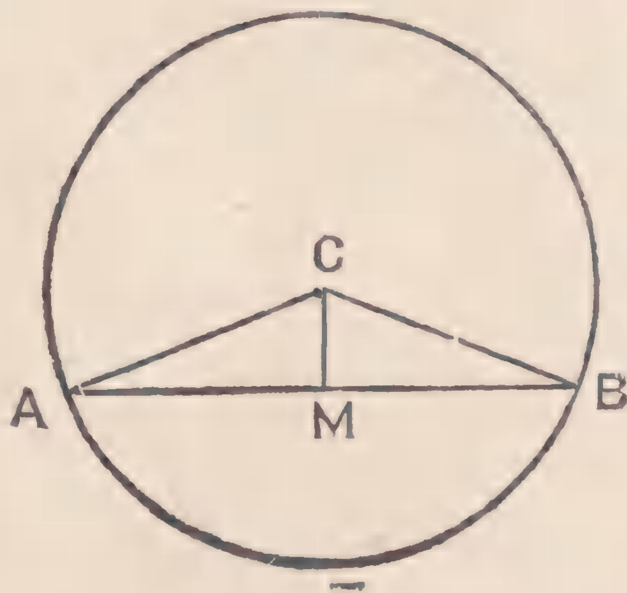
കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടിയല്ലാതെ പരിധിമുതൽ പരിധിവരെയുള്ള ഒരു രേഖയാണ് PQ. അതിനു ജ്യാവ് അല്ലെങ്കിൽ കോർഡ് എന്നു പേർ. അതു വൃത്തത്തെ രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു; ഓരോന്നിനും വൃത്തഖണ്ഡം അല്ലെങ്കിൽ സെഗ്മെന്റ് എന്നു പേർ. പരിധിയേയും അതു രണ്ടായി ഭാഗിക്കുന്നു; അതിൽ ഓരോ വക്രരേഖയ്ക്കും ചാപം അല്ലെങ്കിൽ ആർക് എന്നു പേർ. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ നേർപകുതിയായ വൃത്തഖണ്ഡത്തിന് അർദ്ധവൃത്തമെന്നു പേർ. അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ ജ്യാവ് ഒരു വ്യാസംതന്നെയായിരിക്കും.

ആരം തുല്യമായിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളെ സമവൃത്തങ്ങൾ എന്നും കേന്ദ്രം ഒരേ ബിന്ദുവിൽ വരുന്ന പല വലിപ്പത്തിലുള്ള വൃത്തങ്ങളെ സവൃത്തങ്ങൾ എന്നും പറയുന്നു. സവൃത്തങ്ങളെ ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ സമാന്തരവൃത്തങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ കാൺസെൻട്രിക് സർക്കിൾസ് എന്നും പറയാം. (ചിത്രം 2)

<u>പ്രത്യക്ഷവാക്യം.</u> 1. ഒരു വൃത്തത്തിലെ ആരങ്ങളെല്ലാം തുല്യമായിരിക്കും.

2. ഒരു വൃത്തത്തിലെ ആരം അതിലെ വ്യാസത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

<u>വാക്യം</u> 1. ഒരു ജ്യാവിനെ അർദ്ധാംശിക്കുമാറ് കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു വരുന്ന രേഖ ആ ജ്യാവിനു ചതുരമായിരിക്കും. അഥവാ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരു ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള രേഖ ജ്യാവിനു ചതുരമായിരിക്കും. (ചിത്രം 3)



3

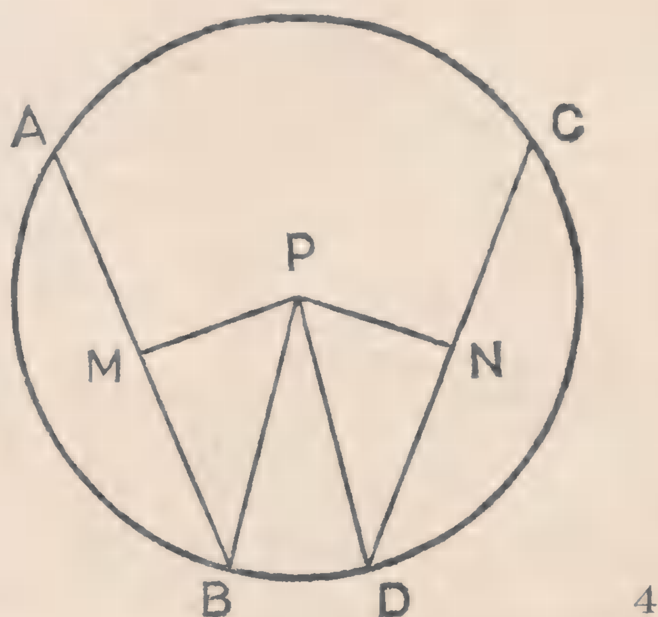
C കേന്ദ്രം; AB ജ്യാവ്; M ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു.
$\triangle AMC$, $\triangle BMC$ ഇവയിലെ മൂമ്മൂന്നു വശങ്ങളും തുല്യമായതുകൊണ്ടു് അവ സർവ്വസമമാണു്.
$\therefore CM \perp AB$ എന്നു സിദ്ധം.

<u>വാക്യം 2.</u> (വാക്യം 1 ന്റെ പ്രതിലോമം). കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നു് ജ്യാവിലേക്കു ചതുരമായി വരുന്ന രേഖ ജ്യാവിനെ അർദ്ധാംശിക്കുന്നു. (ചിത്രം 3)

C കേന്ദ്രം; AB ജ്യാവ്; $CM \perp AB$.
$\triangle AMC$, $\triangle BMC$ ഈ ചതുരത്രികോണങ്ങളിൽ കർണ്ണവും ഓരോ വശവും തുല്യമായതിനാൽ അവ സർവ്വസമമാണു്.
$\therefore AM = BM$ എന്നു സിദ്ധം.

<u>വാക്യം 3.</u> ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ജ്യാവുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് അവയിലേക്കുള്ള ദൂരവും തുല്യമായിരിക്കും. ചിത്രം 4.

$AB = CD$; $PM \perp AB$; $PN \perp CD$.
$\triangle PBM$, $\triangle PDN$ ഈ ചതുരത്രികോണങ്ങളിൽ കർണ്ണവും ഓരോ വശവും സമമായതിനാൽ അവ രണ്ടും സർവ്വസമം.
$\therefore PM = PN$ എന്നു സിദ്ധം.



4

വാക്യം 4 (വാക്യം 3 ൻെറ പ്രതിലോമം). ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ജ്യാവു് കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് ഒരേ ദൂരത്തിരുന്നാൽ അവ തുല്യമായിരിക്കും. (ചിത്രം 4).

$PM \perp AB$; $PN \perp CD$; $PM = PN$.

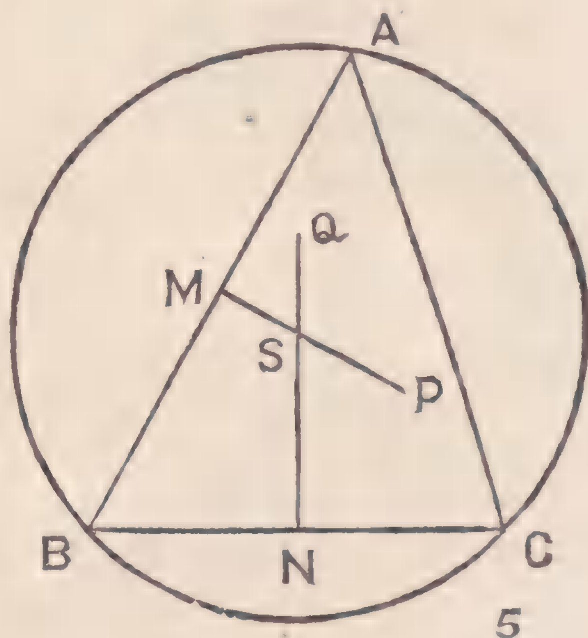
$\triangle PMB$, $\triangle PND$ ഇവയിൽ $PB = PD$; $PM = PN$.

$\therefore \triangle PMB \equiv \triangle PND$; $\therefore MB = ND$.

$\therefore AB = CD$ എന്നു സിദ്ധം.

ഒരു ജ്യാവിൻെറ മദ്ധ്യഭാഗിനി കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നു; അതുകൊണ്ടു് രണ്ടു ജ്യാവുകളുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനികൾ സന്ധിക്കുന്നതു കേന്ദ്രത്തിലായിരിക്കും.

A, B, C ഇവ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളാണു്. AB യുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനിയാണു് MP; അതിലുള്ള ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവാണു P. P കേന്ദ്രമാക്കി PA ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ അതു് A ലും B ലും കൂടി കടന്നുപോകും. കാരണം $PA = PB$. അതുപോലെ BC യുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനിയായ QN ലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണു് Q. Q കേന്ദ്രമാക്കി QB ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ അതു് B ലും C ലും കൂടി കടന്നുപോകും. കാരണം $QB = QC$. രണ്ടു മദ്ധ്യഭാഗിനികൾ സന്ധിക്കുന്ന സ്ഥാനം S.



S കേന്ദ്രമാക്കി SA ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ അതു് A ലും B ലും C ലും കൂടി കടന്നുപോകും. കാരണം SA = SB = SC. മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലുംകൂടി കടന്നുപോകുന്നതായി മറെറാരു വൃത്തവുമില്ല. AC യുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനി വരച്ചാൽ അതു് Sൽ കൂടി കടന്നുപോകും. A, B, C ഒരേ രേഖയിൽ കിടന്നാൽ മൂന്നിലുംകൂടി ഒരു വൃത്തം കടന്നുപോവുകയില്ല.

ഒരു ത്രികോണിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിലുംകൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തിനു് അതിന്റെ പരിവൃത്തം അല്ലെങ്കിൽ സർക്കംസർക്കിൾ എന്നും അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിനു് പരിവൃത്തകേന്ദ്രം അല്ലെങ്കിൽ സർക്കംസെൻറർ എന്നും പേർ.

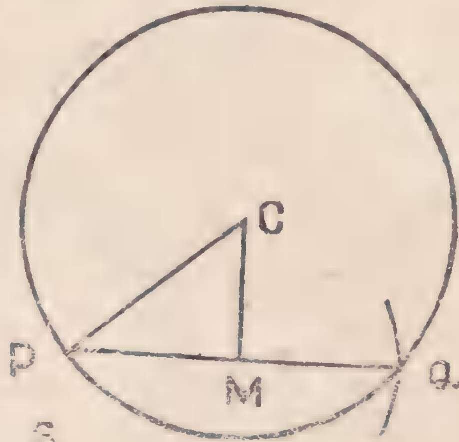
ക്രിയ 1. ഒരു ത്രികോണിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

മേൽവിവരിച്ചപ്രകാരം രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനികൾ വരയ്ക്കുക. അവ സന്ധിക്കുന്ന സ്ഥാനം പരിവൃത്തകേന്ദ്രമായിരിക്കും. അതിൽനിന്നു് ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂലയിലേക്കുള്ള ദൂരം വ്യാസാർദ്ധമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം പരിവൃത്തവുമാണു്.

പ്രത്യക്ഷവാക്യം. ഒരു ത്രികോണിലെ മൂന്നു വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനികൾ മൂന്നും ഒരേ ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

ചോദ്യങ്ങൾ

1. 1·5 സെ. മീ. ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തവും അതിൽ 2·5 സെ. മീ. നീളത്തിലുള്ള ഒരു ജ്യാവും വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു ജ്യാവിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കുക.



C ഒരു ബിന്ദു. അതു കേന്ദ്രമാക്കി 1·5 സെ. മീ. ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. പരിധിയിൽ P എന്ന ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദു കേന്ദ്രമാക്കി 2·4 സെ. മീ. ആരം പിടിച്ചു് ഒരു ചാപംകൊണ്ടു് വൃത്തത്തെ Q ൽ ഖണ്ഡിക്കുക. PQ ചേർത്താൽ 2·4 സെ. മീ. നീളമുള്ള ജ്യാവാണ്.

$CM \perp PQ.$

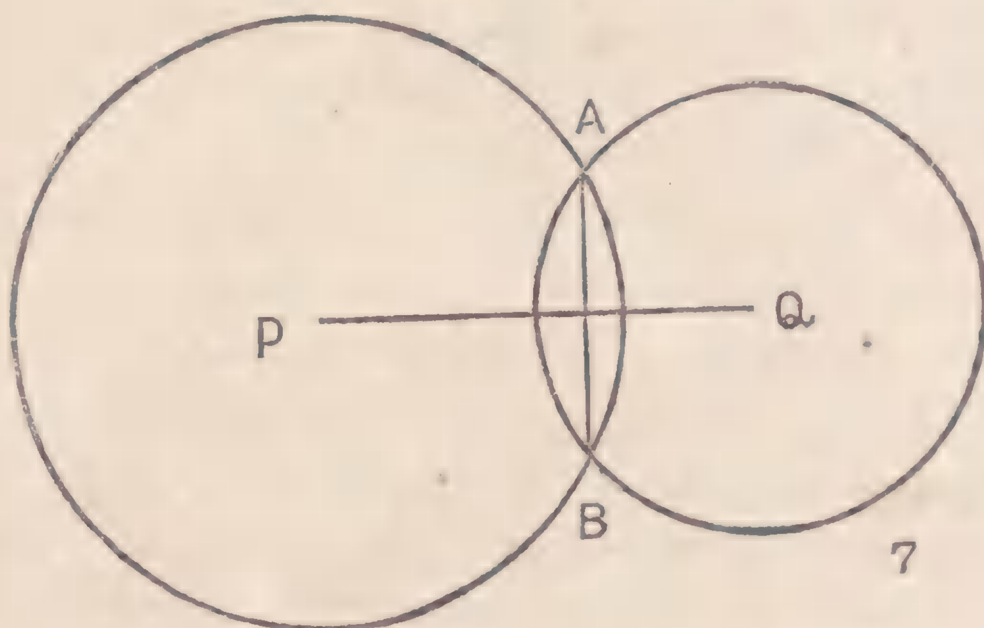
$PC^2 = PM^2 + CM^2 ; \quad \therefore 1{\cdot}5^2 = 1{\cdot}2^2 + CM^2.$

$CM^2 = 1{\cdot}5^2 - 1{\cdot}2^2 = 2{\cdot}25 - 1{\cdot}44 = {\cdot}81$

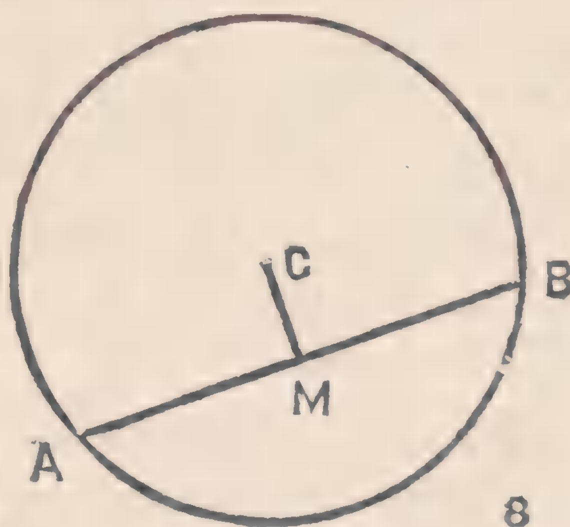
$CM = \sqrt{{\cdot}31} = {\cdot}9$ സെ. മീ.

2. 3·2 സെ. മീ. അകലത്തിലുള്ള P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രമാക്കി 2·2 സെ. മീ; 1·6 സെ. മീ. ഈ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ രണ്ടു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. അവയ്ക്കു രണ്ടിനും കൂടിയുള്ള ജ്യാവിൻെറ നീളം അളന്നെഴുതുക.

P, Q, 3·2 സെ. മീ. അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ. P കേന്ദ്രമാക്കി 2·2 സെ. മീ. ആരം പിടിച്ചും Q കേന്ദ്രമാക്കി 1·6 സെ. മീ. ആരം പിടിച്ചും വൃത്തം വരയ്ക്കുക. അവ A ലും B ലും സന്ധിക്കുന്നു. രണ്ടിനുംകൂടിയുള്ള ജ്യാവു് AB.



3. ഒരു വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ഒരു കൊടുക്കപ്പെട്ട ബിന്ദു മദ്ധ്യബിന്ദുവായി വരത്തക്കവണ്ണമുള്ള ജ്യാവു വരയ്ക്കുക.



C കേന്ദ്രം; M കൊടുക്കപ്പെട്ട ബിന്ദു. CM ചേർത്തു വരയ്ക്കുക. CM നു ചതുരമായി M ൽകൂടി AB വരയ്ക്കുക. അപ്പോൾ M AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 34

1. $2\frac{1}{2}$ ഇഞ്ചു വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു $1\frac{1}{2}$ ഇ. ദൂരത്തിലുള്ള ജ്യാവിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

2. 6 സെ. മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ 8 സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു ജ്യാവുണ്ട്. എന്നാൽ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു ജ്യാവിലേക്കുള്ള ചതുരരേഖയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

3. ഒരു വൃത്തത്തിൽ 5 സെ. മീ. നീളത്തിൽ ഒരു ജ്യാവുണ്ട്. അതിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽനിന്നു കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം 3 സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കണക്കാക്കുക.

4. AB, PQ ഇവ 10 സെ. മീ. വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു സമാന്തരജ്യാവുകളാണ്. അവയുടെ നീളം 6 സെ. മീ., 4 സെ. മീ. അവ രണ്ടും കേന്ദ്രത്തിന്റെ ഒരേ വശത്തായാൽ അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കുക. അവ കേന്ദ്രത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളിൽ കിടന്നാൽ അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം എന്തായിരിക്കും.

5. 6 സെ. മീ., 5 സെ. മീ. ഈ വ്യാസാർദ്ധത്തിലുള്ള രണ്ടു സവൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രം C ആകുന്നു. C ൽ നിന്നു 2 സെ. മീ. അകലത്തിലുള്ള രേഖ അകത്തെ വൃത്തത്തെ A, B എന്ന ബിന്ദുക്കളിലും പുറത്തെ വൃത്തത്തെ P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിലും സന്ധിക്കുന്നു. എന്നാൽ പരിധിയുടെ ഇടയ്ക്കുകിടക്കുന്ന PA, BQ ഇവയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

6. 2·5″, 1·6″ ഈ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ പരസ്പരം സന്ധിക്കുന്നു. PQ = 2·4″ ആയാൽ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കുക.

7. P ഒരു വൃത്തത്തിനകത്ത് എവിടെയെങ്കിലുമുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ്. P മദ്ധ്യബിന്ദുവായി വരത്തക്കവണ്ണം അതിൽക്കൂടി ഒരു ജ്യാവു വരക്കുക.

8. A, B 3 ഇഞ്ചു് അകലത്തുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ്. 2″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ളതും A ലും B ലും കൂടി കടന്നുപോകുന്നതുമായ ഒരു വൃത്തം വരക്കുക.

9. AB = 1·8″, BC = 2·4″, CA = 2·1″ ഈ അളവിൽ ഒരു ത്രികോൺ വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക. പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം അളന്നെഴുതുക.

10. PQ = 4·5 സെ. മീ; QR = 6 സെ. മീ; PR = 7·5 സെ. മീ. ഈ അളവിലുള്ള ഒരു ത്രികോൺ വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക. പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധമെന്ത്.

11. ഒരു രേഖ രണ്ടു സവൃത്തങ്ങളെ ഖണ്ഡിച്ച് അകത്തെ വൃത്തത്തിൽ PQ എന്ന ജ്യാവും പുറത്തെ വൃത്തത്തിൽ AB എന്ന ജ്യാവും ഉണ്ടാകുന്നു. രണ്ടു പരിധികളുടെ ഇടയ്ക്കു കിടക്കുന്ന AP, QB എന്ന രേഖകൾ രണ്ടും തുല്യമാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

12. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം P,Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുന്നു. അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ O, C ഇവയാണെങ്കിൽ OC PQന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽക്കൂടിയുള്ള ചതുരഃരഖയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

13. O, C ഇവ കേന്ദ്രമായുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുന്നു. R PQൻെറ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണെങ്കിൽ, ORC ഒരു നേർവരയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

14. O, C ഇവ കേന്ദ്രമായുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ Pലും Qലും സന്ധിക്കുന്നു. OCയ്ക്കു സമാന്തരമായി P ൽക്കൂടിയുള്ള രേഖ പരിധികളെ Aലും Bലും സന്ധിക്കുന്നു. AB = 2 OC എന്നു തെളിയിക്കുക.

15. O, C ഇവ കേന്ദ്രമായുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ Pലും Qലും സന്ധിക്കുന്നു. M OCയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു. MPയ്ക്കു ചതുരമായി Pൽ ക്കൂടിയുള്ള രേഖ പരിധികളെ Aലും Bലും സന്ധിക്കുന്നു. PA = PB എന്നു തെളിയിക്കുക.

16. O, C കേന്ദ്രമായുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ Pലും Qലും സന്ധിക്കുന്നു. APB XQY എന്ന രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ പരിധികളെ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് A, B, X, Y. AB = XY എന്നു തെളിയിക്കുക.

17. C ഒരു വൃത്തത്തിലെ കേന്ദ്രം; CA ഒരു വ്യാസാർദ്ധം; ∠CAP, ∠CAQ ഇവ CAയുടെ ഇരുവശങ്ങളിലുള്ള തുല്യമായ കോണുകൾ. AP, AQ ഈ രണ്ടു ജ്യാക്കൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(S. S. L. C. Questions)

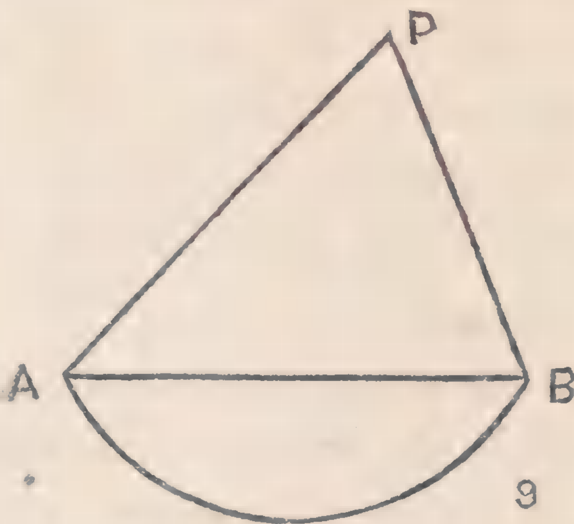
18. 2 ഇഞ്ചു വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ നീളം a യും $\frac{2}{3}a$ യും ആകുന്നു. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ ജ്യാവിലേക്കുള്ള ദൂരം രണ്ടാമത്തെ ജ്യാവിലേക്കുള്ള ദൂരത്തിൻെറ പകുതിയാണ്. എന്നാൽ a എത്ര.

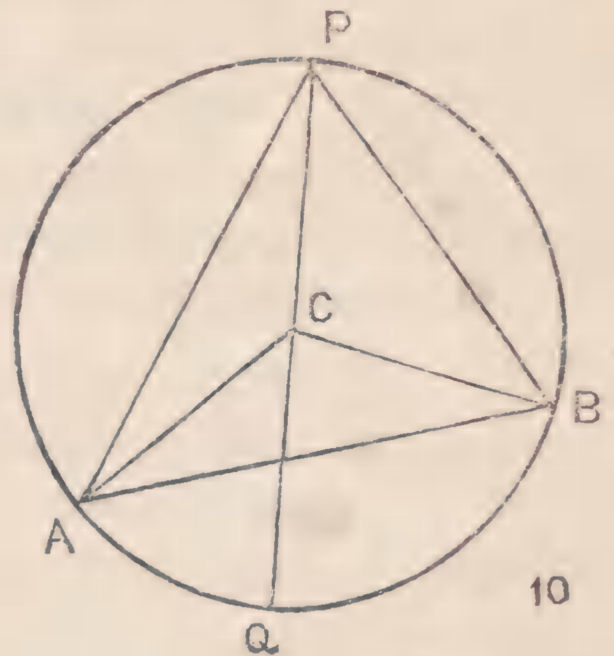
19. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 9 സെ. മീ. അകലേയുള്ള ജ്യാവിൻെറ നീളം 14 സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ 11 സെ. മീ. അകലെയുള്ള ജ്യാവിന്റെ നീളം കാണുക.

20. 3 cm. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലായി യഥാക്രമം 3·6 cm; 4·8 cm; നീളത്തിൽ AB, CD എന്ന രണ്ടു സമാന്തരജ്യാക്കൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ജ്യാക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുക.

അദ്ധ്യായം XII

വൃത്തഖണ്ഡം





ചിത്രം 9-ൽ AB ഒരു രേഖ; P ഒരു ബിന്ദു. ABക്കു സമ്മുഖമായി Pൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ ∠APB. AB ഒരു വക്രരേഖയായിരുന്നാലും ∠APBയെ സമ്മുഖകോൺ എന്നു പറയാം.

ചിത്രം 10-ൽ C ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം: AB ഒരു ജ്യാവു്; P പരിധിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു. AB എന്ന ജ്യാവിനും AB എന്ന ചെറിയ ചാപത്തിനും സമ്മുഖമായി പരിധിയിലുള്ള കോൺ ∠APB; കേന്ദ്രത്തിലുള്ള സമ്മുഖകോൺ ∠ACB. APB എന്ന വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോൺ എന്നു പറയുന്നതും ∠APB യെയാണു്.

<u>വാക്യം 5.</u> ഒരു ചാപത്തിന്ന സമ്മുഖമായി കേന്ദ്രത്തിലുള്ള കോൺ പരിധിയിൽ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിലുള്ള സമ്മുഖകോണിൻെറ രണ്ടിരട്ടിയാകുന്നു. [ചിത്രം 10]

C ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രം. AB ഒരു ജ്യാവു്. AB എന്ന ചാപത്തിന്നു് എതിരെ പരിധിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണു് P.

$\angle ACB = 2\ \angle APB$ എന്നു സിദ്ധം.

PC ചേർത്തുവരച്ചു് Q വരെ നീട്ടുക.

$\triangle APC$ൽ $\angle ACQ = \angle CAP + \angle CPA$

$CA = CP;\ \therefore \angle CAP = \angle CPA$

$\therefore \angle ACQ = 2\ \angle CPA$

$\triangle BPC$ൽ $\angle BCQ = \angle CBP + \angle CPB$

$CB = CP;\ \therefore \angle CBP = \angle CPB$

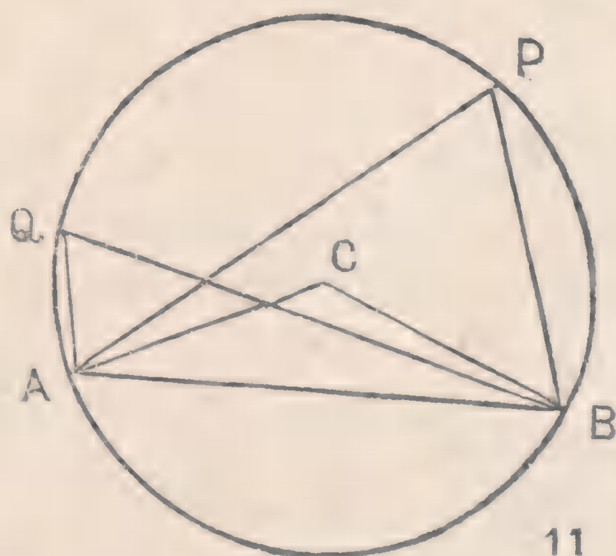
$\therefore \angle BCQ = 2\ \angle CPB$

$\therefore \angle ACQ + \angle BCQ = 2\ \angle CPA + 2\ \angle CPB$

$= 2(\angle CPA + \angle CPB)$

$= 2\ \angle APB$

<u>വാക്യം 6.</u> ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലുള്ള കോൺ എല്ലാം തുല്യമായിരിക്കും.



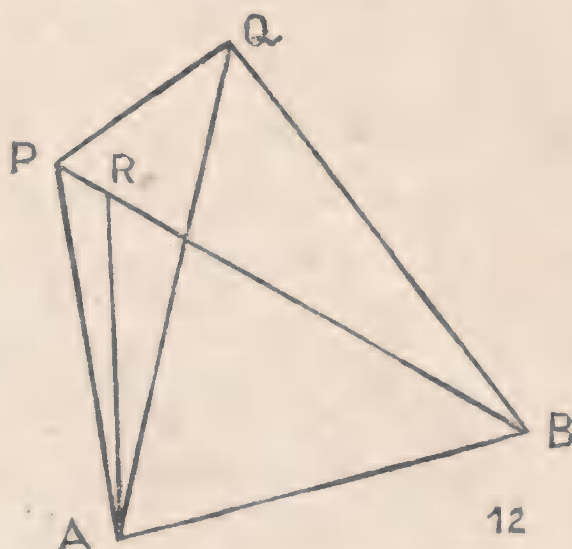
11

C ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം. AB ഒരു ജ്യാവു്. $\angle APB$, $\angle AQB$ ഇവ ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലുള്ള കോൺ. $\angle APB = \angle AQB$ എന്നു സിദ്ധം.

$\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB. \quad \angle AQB = \frac{1}{2} \angle ACB.$

$\therefore \angle APB = \angle AQB.$

<u>വാക്യം 7.</u> (വാക്യം 6ന്റെ പ്രതിലോമം). രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ ചേൎക്കുന്ന രേഖയ്ക്കു സമ്മുഖമായി അതിന്റെ ഒരേവശത്തുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ തുല്യമായ കോൺ ഉണ്ടാകുന്നെങ്കിൽ ഈ നാലു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം കടന്നുപോകും.



A, B രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ. P, Q ഒരേ വശത്തുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ. $\angle APB = \angle AQB$. A, P, Q, B ഇവയിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം കടന്നു പോകും എന്നു സിദ്ധം.

A, Q, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി പോകുന്ന വൃത്തം Pൽ കൂടി പോകുന്നില്ലെങ്കിൽ BPൽ R എന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി പോകുന്നു എന്നു വിചാരിക്കാം. അപ്പോൾ $\angle AQB$, $\angle ARB$ ഇവ ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണാകുന്നു.

$\therefore \angle ARB = \angle AQB.$

എന്നാൽ $\angle APB = \angle AQB.$

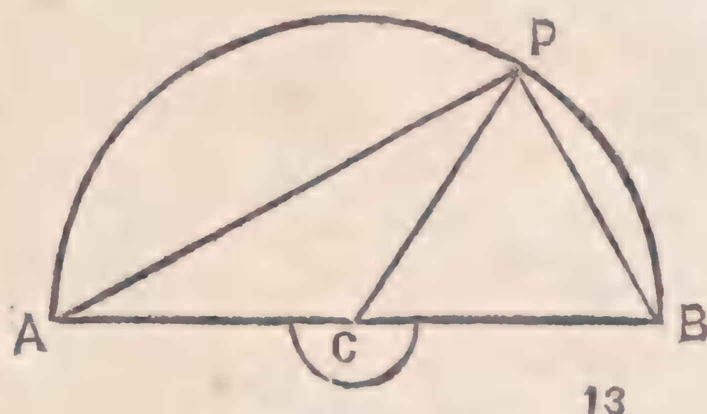
$\therefore \angle APB = \angle ARB$ എന്നു സിദ്ധിക്കുന്നു.

എന്നാൽ $\angle APB$ ഉൾക്കോണും $\angle ARB$ പുറങ്കോണുമാകയാൽ

രണ്ടും തുല്യമാകയില്ല. ഈ പൂർവാപരവൈരുദ്ധ്യം നീങ്ങണമെങ്കിൽ P, R ഇവ രണ്ടും ഒരേ ബിന്ദുവായിരിക്കണം.

∴AQB എന്ന വൃത്തം Pൽകൂടി പോകും; അതായതു് A,P,Q,B ഇവയിൽകൂടി ഒരു വൃത്തം കടന്നുപോകും എന്നു സിദ്ധം.

വാക്യം 8. ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ ചതുരക്കോണായിരിക്കും. (ചിത്രം 13)



13

C ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രം. AB ഒരു വ്യാസം. P പരിധിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു. ∠APB അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ.

അർദ്ധവൃത്തത്തിനു സമ്മുഖമായി കേന്ദ്രത്തിലുള്ള ∠ACB രണ്ടു ചതുരക്കോണാണു്. അതുകൊണ്ടു് പരിധിയിലെ സമ്മുഖകോൺ ഒരു ചതുരക്കോണായിരിക്കും.

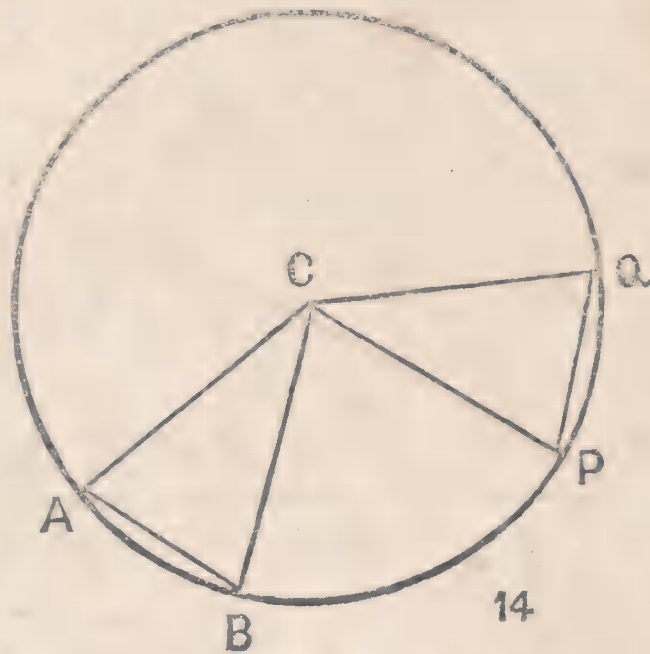
∴ ∠APB = 90° എന്നു സിദ്ധം.

CA, CP, CB ഇവ തുല്യമായാൽ ∠APB = 90° എന്നും പറയാം.

വാക്യം 9. (വാക്യം 8ൻെറ പ്രതിലോമം). ഒരു ചതുരത്രികോണിൻെറ കർണ്ണം വ്യാസമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം എതിരെയുള്ള മൂലയിൽകൂടിപോകും. (ചിത്രം 13.)

△APB ഒരു ചതുരത്രികോൺ. ∠APB = 90°. ABയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു C. AB വ്യാസമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം Pൽ കൂടി പോകുമെന്നു സിദ്ധം. അതായതു് CA = CP = CB എന്നും പറയാം.

<u>വാക്യം 10.</u> ഒരു വൃത്തത്തിൽ, അഥവാ രണ്ടു സമവൃത്തങ്ങളിൽ, രണ്ടു ചാപത്തിന്ന സമ്മുഖമായി കേന്ദ്രത്തിലായാലും പരിധിയിലായാലും തുല്യമായ കോൺ ഉണ്ടാകുന്നെങ്കിൽ ആ ചാപം രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കും.



C ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രം. AB, PQ ഇവ രണ്ടു ചാപം.
$\angle ACB = \angle PCQ$. $\therefore$ AB = PQ എന്നു സിദ്ധം.

സമ്മുഖകോൺ പരിധിയിലായാലും സമവൃത്തങ്ങളിലായാലും ഇതുപോലെ തന്നെ.

<u>ഉപവാക്യം.</u> ഒരു വൃത്തത്തിൽ, അഥവാ രണ്ടു സമവൃത്തങ്ങളിൽ രണ്ടു ജ്യാവു തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയുടെ ചാപവും തുല്യമായിരിക്കും. (ചിത്രം 14)

AB=PQ.

$\therefore \triangle ACB \equiv \triangle PCQ$

$\therefore \angle ACB = \angle PCQ$

$\therefore$ ചാപം AB = ചാപം PQ എന്നു സിദ്ധം.

<u>വാക്യം 11.</u> (വാക്യം 10ൻെറ പ്രതിലോമം) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, അഥവാ രണ്ടു സമവൃത്തങ്ങളിൽ, രണ്ടു ചാപം തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയ്ക്കു സമ്മുഖമായി കേന്ദ്രത്തിലുള്ള കോൺ തുല്യമായിരിക്കും

അതുപോലെ പരിധിയിലുള്ള കോണും തുല്യമായിരിക്കും. (ചിത്രം 14)

ചാപം AB = ചാപം PQ

∴ ∠ACB = ∠PCQ എന്നു സിദ്ധം

<u>ഉപവാക്യം.</u> ഒരു വൃത്തത്തിൽ, അഥവാ രണ്ടു സമവൃത്തങ്ങളിൽ, രണ്ടു ചാപം തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയുടെ ജ്യാവും തുല്യമായിരിക്കും. (ചിത്രം 14)

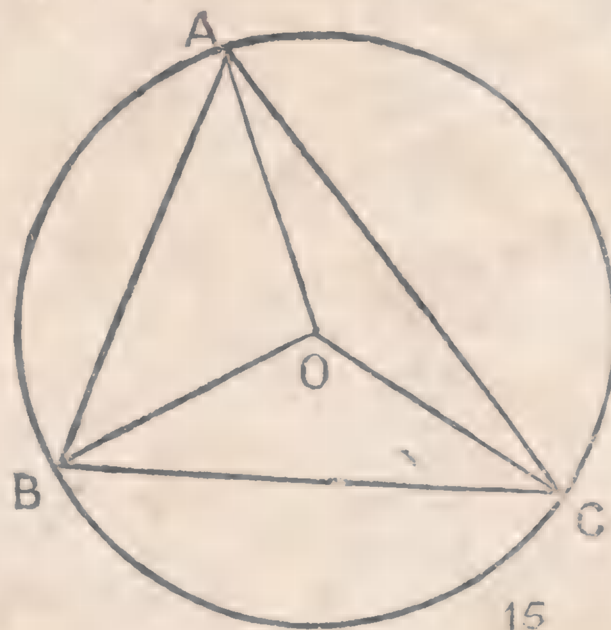
ചാപം AB = ചാപം PQ

∴ ∠ACB = ∠PCQ

∴ △ACB ≡ △PCQ

∴ AB = PQ എന്നു സിദ്ധം.

ഒരു വൃത്തത്തിനകത്തു് 50°, 60°, 70° ഈ കോണുകളുള്ള ഒരു ത്രികോൺ വരയ്ക്കുക. (1946)



15

O കേന്ദ്രം. കേന്ദ്രത്തിൽ 100°, 120° ഈ അളവിൽ AOB, BOC എന്ന രണ്ടു കോൺ വരയ്ക്കുക. ABC ചേർത്തു് ത്രികോൺ നിർമ്മിക്കുക.

$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOB = 50^\circ$

$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ$

$\therefore \angle ACB = 70^\circ$

അഭ്യാസം 35

1. ഒരു വൃത്തത്തിലെ ആരത്തിൻ തുല്യമായി ഒരു ജ്യാവുണ്ടെങ്കിൽ ആ ജ്യാവിൻെറ ചാപം പരിധിയുടെ ആറിലൊരു ഭാഗമാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

2. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിൽ 30° സമ്മുഖമാക്കുന്ന ജ്യാവു് ആരത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. A, B, C, D ഇവ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ക്രമത്തിലുള്ള നാലു ബിന്ദുക്കളാണു്. AC, BD ഈ ജ്യാക്കൾ തുല്യമാണു്. $\angle AOB = \angle COD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. AB, CD ഇവ ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളാണു്. ABക്കു സമാന്തരമായ ജ്യാവാണു് CE. എന്നാൽ DBE എന്ന ചാപത്തിൻെറ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണു് B എന്നു തെളിയിക്കുക.

5. AB, CD ഇവ ഒരു വൃത്തത്തിലെ സമാന്തരമായ രണ്ടു ജ്യാക്കളാണു്. $AC = DB$ എന്നും $AD = BC$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

6. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ Aലും Bലും സന്ധിക്കുന്നു. AP, BQ ഇവ ഓരോ വൃത്തത്തിലെ വ്യാസങ്ങളാണു്. PBQ ഒരേ രേഖയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ABC എന്ന ത്രികോണിൻെറ പരിവൃത്തകേന്ദ്രമാണു് S. എന്നാൽ $\angle BSC = 2\ \angle BAC$ എന്നും $\angle SBC = 90^\circ - \angle BAC$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

8. ABC എന്ന ത്രികോണിൽ Bൽ നിന്നും Cൽ നിന്നും എതിർവശത്തേക്കുള്ള ചതുരരേഖകളാണു് BE, CF. B, C, E, F ഇവ ഒരു വൃത്തത്തിൽ കിടക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

9. 1·8″ ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തവും അതിനകത്തു് ഒരു സമഭുജത്രികോണവും വരയ്ക്കുക. ത്രികോണിൻെറ ഒരു വശം അളന്നെഴുതുക.

10. $\triangle ABC$ൽ $AB = AC$. ABയും ACയും വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങൾ BCയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

11. O കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ AB, CD എന്ന രണ്ടു ജ്യാക്കൾ Pൽ സന്ധിക്കുന്നു. എന്നാൽ $\angle AOC + \angle BOD = 2\ \angle APC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

12. $\triangle ABC$ൽ $AB = AC$. ABCയുടെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം S ആകുന്നു. എന്നാൽ $\angle SAB = \angle SAC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(S. S. L. C. Question)

13. ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിൽ AB അതിൻെറ വ്യാസവും PQ അതിലെ ഒരു ഞാണും ആണ്. ഇവ രണ്ടും നീട്ടി X എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംയോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. $\angle X = 24°$യും $\angle PAQ = 42°$യും ആയാൽ $\angle PBA$യുടെ അളവു കണക്കാക്കുക.

അദ്ധ്യായം XIII

ചക്രചതുർഭുജം

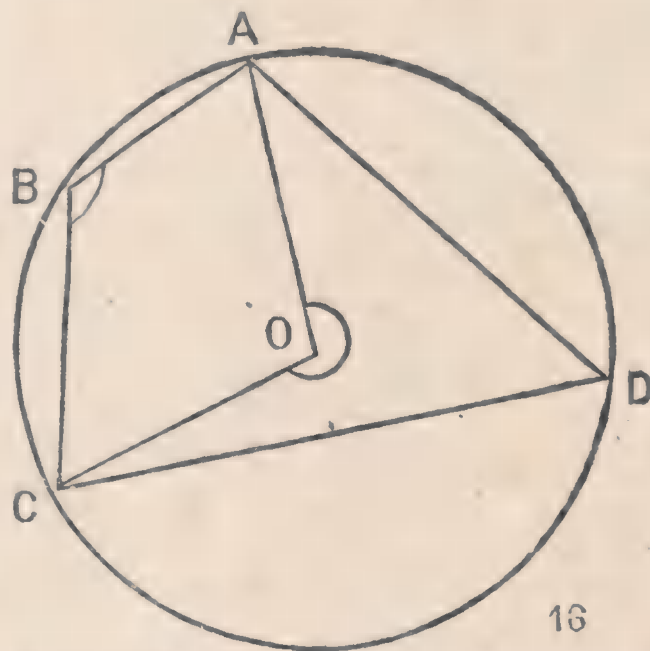
ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിൽ കിടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾക്കു ചക്രബിന്ദുക്കൾ എന്നും അങ്ങനെയുള്ള നാലു ബിന്ദുക്കൾ ചേർത്തു കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജത്തിന് ചക്രചതുർഭുജം എന്നും പറയുന്നു.

ചിത്രം 12-ൽ $\angle APB = \angle AQB$ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നതിനാൽ APQB ഒരു ചക്രചതുർഭുജമാണെന്നു സിദ്ധിക്കുന്നു. മറിച്ചു APQB ഒരു ചക്രചതുർഭുജമാണെങ്കിൽ വാക്യം 6 അനുസരിച്ചു നാലു ജോടി തുല്യമായ കോണുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

$\angle APB = \angle AQB \qquad \angle BAQ = \angle BPQ$

$\angle PAQ = \angle PBQ \qquad \angle ABP = \angle AQP$

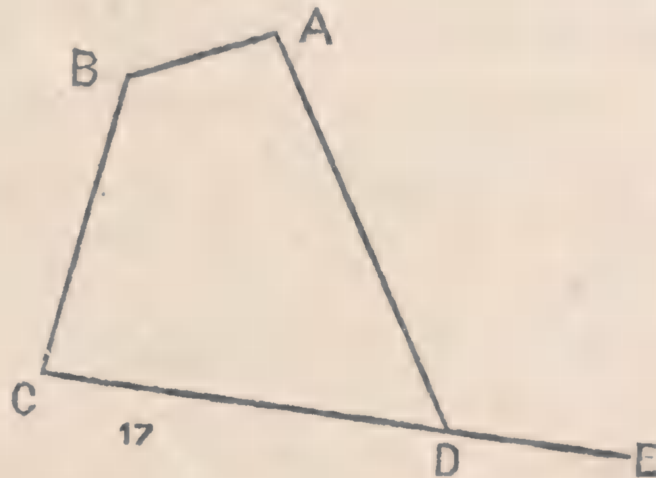
<u>വാക്യം 12.</u> ഒരു ചക്രചതുർഭുജത്തിലെ എതിർ കോണുകൾ ഒന്നിച്ചാൽ രണ്ടു ചതുരക്കോണാകും. (ചിത്രം 16)



O വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം. ABCD ചക്രചതുർഭുജം.
$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ എന്നും $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ എന്നും സിദ്ധം.
OA, OC വരയ്ക്കുക.
ചാപം ABCയ്ക്കു സമ്മുഖമായതുകൊണ്ടു് $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC$
ചാപം ADC യ്ക്കു സമ്മുഖമായതുകൊണ്ടു് $\angle ABC = \frac{1}{2}$ AOC
മറുവശത്തെ $\angle AOC$)·
കൂട്ടുക; $\therefore \angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2} \times 360 = 180^\circ$ എന്നു സിദ്ധം. ഇതുപോലെ OB, OD വരച്ചാൽ $\angle BCD + \angle BAD$ എന്നും സിദ്ധിക്കുന്നു.

<u>ഉപവാക്യം.</u> ഒരു ചക്രചതുർഭുജത്തിലെ ഒരു വശം നീട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന പുറങ്കോൺ എതിരെയുള്ള ഉൾക്കോണിനു തുല്യമാണു്. (ചിത്രം 17)

ABCD ഒരു ചക്രചതുർഭുജം. $\angle ADE$ ഒരു പുറങ്കോൺ. $\angle ABC$ എതിരെയുള്ള ഉൾക്കോൺ.
$\angle ABC = \angle ADE$ എന്നു സിദ്ധം.
$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
$\angle ADE + \angle ADC = 180^\circ$
$\therefore \angle ABC = \angle ADE$ എന്നു സിദ്ധം.



വാക്യം 13 (വാക്യം 12ന്റെ പ്രതിലോമം). ഒരു ചതുർഭുജത്തിൽ എതിരെയുള്ള രണ്ടു കോണുകളുടെ തുക 180° ആയാൽ അതു് ഒരു ചക്രചതുർഭുജമായിരിക്കും

ABCD ഒരു ചതുർഭുജം. $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

$\therefore$ ABCD ഒരു ചക്രചതുർഭുജമാണു് എന്നു സിദ്ധം.

അഭ്യാസം 36

1. $\triangle ABC$ൽ $AB = AC$. BCയ്ക്കു സമാന്തരമായ ഒരു രേഖ ABയെ Pലും ACയെ Qലും സന്ധിക്കുന്നു. B, P, Q, C ഇവ ചക്രബിന്ദുക്കളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ABCD ഒരു ചക്രചതുർഭുജമാണു്. $\angle A$, $\angle B$ ഇവയുടെ വ്യത്യാസം $\angle C$, $\angle D$ ഇവയുടെ വ്യത്യാസത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. ഒരു സമാന്തരചതുർഭുജം ഒരു ചക്രചതുർഭുജംകൂടിയാണെങ്കിൽ അതു് ഒരു ചതുരഃക്ഷേത്രമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

4. $\triangle ABC$ൽ $\angle B$, $\angle C$ ഇവയുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനികൾ Pൽ സന്ധിക്കുന്നു. AB, AC ഇവ നീട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന പുറംകോണുകളുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനികൾ Qലും സന്ധിക്കുന്നു. BPCQ ഒരു ചക്രചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

5. ABCD ഒരു സമാന്തര ചതുർഭുജമാണ്. Bലും Cലും കൂടി പോകുന്ന ഒരു വൃത്തം ABയെ Pലും CDയെ Qലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. എന്നാൽ A, P, Q, D ഇവ ചക്രബിന്ദുക്കളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

6. ABCD ഒരു ചക്രചതുർഭുജമാണ്. $AB = CD$ ആയാൽ ADയും BCയും സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(S. S. L. C. Questions)

7. O കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ ചക്രചതുർഭുജമാണ് ABCD. AC, BD എന്ന കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ചതുരമായാൽ $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

8. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle ADB = 40^\circ$, $\angle BCD = 70^\circ$. എന്നാൽ ABCD ചക്രചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. $\angle ACB$യുടെ അളവെന്ത്.

9. $AB = 2''$, $\angle A = 72^\circ$, $\angle B = 39^\circ$ ഈ അളവിൽ ഒരു ത്രികോൺ വരച്ച് അതിൻെറ പരിവൃത്തം നിർമ്മിക്കുക. AB എന്ന ചെറിയ ചാപത്തിൽ P എന്നൊരു ബിന്ദുവുണ്ടെങ്കിൽ $\angle APB$യുടെ അളവെന്തെന്നു കണക്കാക്കുക.

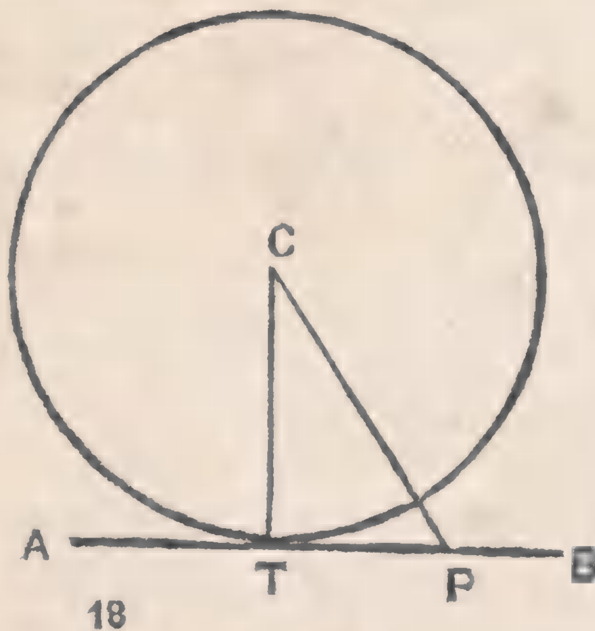
10. A, B കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ Xലും Yലും സന്ധിക്കുന്നു. Xൽകൂടി പോകുന്ന ഒരു രേഖ വൃത്തങ്ങളെ Pലും Qലും സന്ധിക്കുന്നു, അതിനു സമാന്തരമായി Yൽകൂടി പോകുന്ന രേഖ വൃത്തങ്ങളെ Rലും Sലും സന്ധിക്കുന്നു. PXYR, QXYS ഇവ ചക്രചതുർഭുജങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

അദ്ധ്യായം XIV

സ്പൎശരേഖ

ഒരു രേഖയും ഒരു വൃത്തവും തമ്മിൽ സന്ധിക്കുന്നെങ്കിൽ സാധാരണയായി രണ്ടു സന്ധികൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. രേഖ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് അകന്നകന്നുപോയാൽ ഒരു സ്ഥാനത്തു് എത്തുമ്പോൾ അതു് വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽവെച്ചു സ്പൎശിക്കുക മാത്രമേ ചെയ്യുകയുള്ളു; മുറികടന്നു പോവുകയില്ല. ഈ രേഖയ്ക്കു് സ്പൎശരേഖ അല്ലെങ്കിൽ ടാൻജൻറു് എന്നും ബിന്ദുവിനു് സ്പൎശബിന്ദുവെന്നും പറയുന്നു. ബിന്ദുവിൻെറ ഇരുവശത്തേക്കും രേഖ നീട്ടിക്കൊണ്ടുപോയാൽ വൃത്തത്തിൽനിന്നു് അകന്നകന്നു പോകും.

വാക്യം 14. ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്ന ആരവും സ്പൎശരേഖയും ചതുരശ്രരേഖകളായിരിക്കും. ചിത്രം 18.



C ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രം. AB അതിൻെറ സ്പൎശരേഖ. T സ്പൎശബിന്ദു. CT = AB എന്നു സിദ്ധാം.

AB യിലുള്ള മറെറാരു ബിന്ദുവാണ് P. അതു് വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തായിരിക്കും.

∴ CP CT യെക്കാൾ വലുതാണ്.

∴ C ൽ നിന്ന് AB ലേക്കുള്ള ഏററവും കുറഞ്ഞ ദൂരമാണ് CT.

∴ CT ⊥ AB എന്നു സിദ്ധം.

•

<u>ഉപവാക്യം</u> (വാക്യം 14-ന്റെ പ്രതിലോമം) ഒരു ആരത്തിന്റെ അററത്തുകൂടി വരയ്ക്കുന്ന ലംബരേഖ ഒരു സ്പർശരേഖയായിരിക്കും. ചിത്രം (18)

C കേന്ദ്രം; CT ഒരു ആരം; AB ⊥ CT.

∴ AB ഒരു സ്പർശരേഖയാണ് എന്നു സിദ്ധം.

AB ലുള്ള മറെറാരു ബിന്ദുവാണ് P.

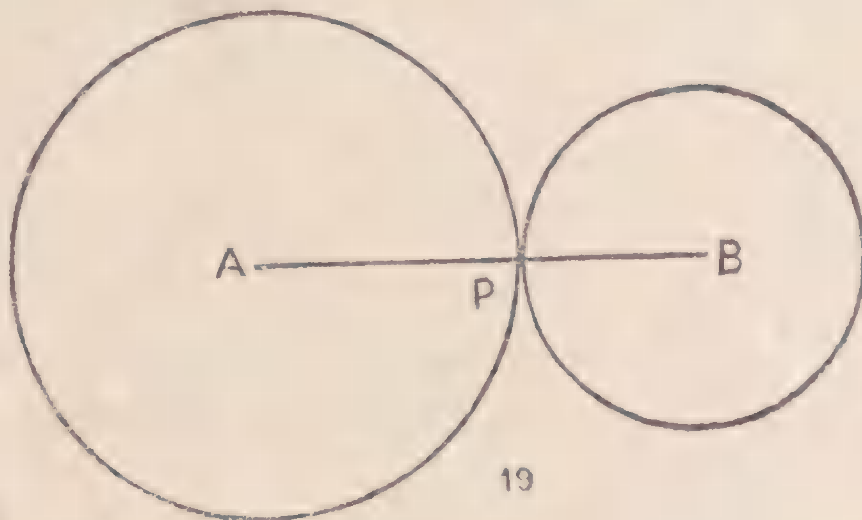
△ CTP ഒരു ലംബത്രികോണം. CP അതിന്റെ കർണ്ണം.

∴ CP CT യെക്കാൾ വലുതു്; അതായതു് ആരത്തെക്കാൾ വലുതു്. ∴ P വൃത്തത്തിനു വെളിയിൽ കിടക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ T ഒഴിച്ചുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും വൃത്തത്തിന് പുറത്താണ്.

∴ AB ഒരു സ്പർശരേഖയാണ്.

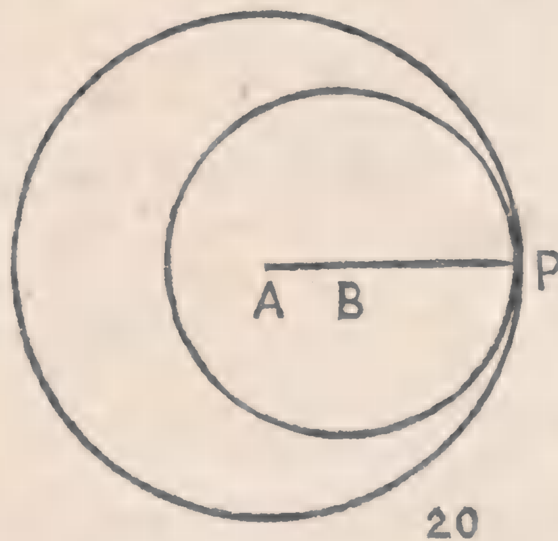
രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ സന്ധിക്കുമ്പോൾ സാധാരണയായി രണ്ടു സന്ധികൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം അടുത്തടുത്ത് ഒരു സ്ഥാനത്തു് എത്തുമ്പോൾ അവ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുക മാത്രം ചെയ്യും; ഖണ്ഡിക്കുകയില്ല. ഇങ്ങനെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം സന്ധിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങൾക്ക് സ്പർശവൃത്തങ്ങൾ എന്നും ആ ബിന്ദുവിന് സ്പർശബിന്ദു എന്നും പറയാം.

<u>വാക്യം 15.</u> സ്പർശവൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളും സ്പർശബിന്ദുവും ഒരേ രേഖയിൽത്തന്നെ കിടക്കുന്നു. ചിത്രം 19.



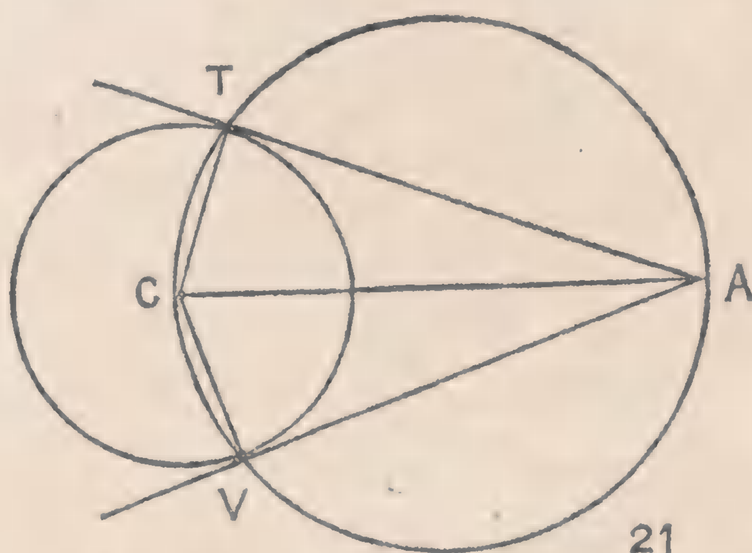
A, B രണ്ടു സ്പർശവൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ. P സ്പർശബിന്ദു. APB ഒരു രേഖയാണെന്നു സിദ്ധം.

സ്പർശവൃത്തങ്ങളിൽ ഒന്നു മറ്റേതിനകത്തും വരാം. ചിത്രം 20. A പുറത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം; B അകത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം. P സ്പർശബിന്ദു.



<u>ക്രിയ 2.</u> ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിലുള്ള സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക. (ചിത്രം 18). C ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം. T അതിലെ ഒരു ബിന്ദു. CT വരച്ചു് T ൽ കൂടി അതിനു ചതുരമായി AB വരയ്ക്കുക. അപ്പോൾ AB ഒരു സ്പർശരേഖയായിരിക്കും.

ക്രിയ 3. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു് വൃത്തത്തിലേക്കു സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക. ചിത്രം 21.



C ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം. A പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദു.

CA ചേർത്തു് അതു വ്യാസമാക്കി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

രണ്ടു വൃത്തങ്ങളും T, V എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുന്നു. CT, CV, AT, AV ഇവ വരയ്ക്കുക.

$\angle ATC = \angle AVC = 90°$.

CT, CV ഇവ രണ്ടും ആരവുമാണു്.

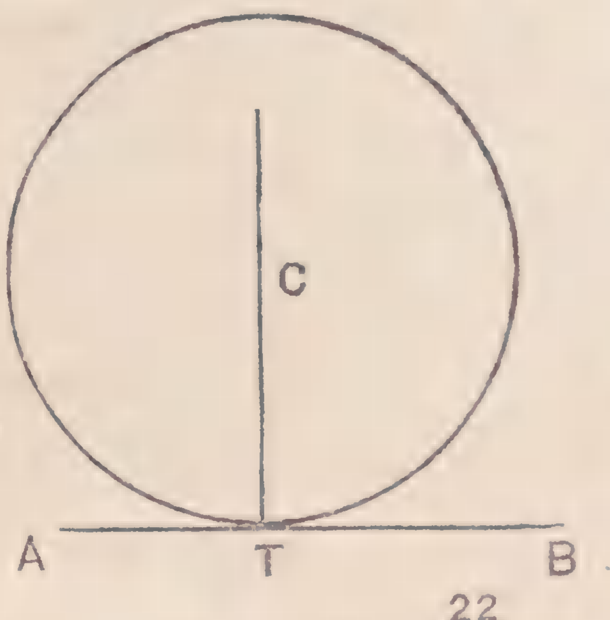
$\therefore$ AT, AV ഇവ രണ്ടും സ്പർശരേഖയാണു്.

ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു് ഒരു വൃത്തത്തിലേക്കു് രണ്ടു സ്പർശരേഖകളുണ്ടു്.

ക്രിയ 4. ഒരു രേഖയെ ഒരു ക്ലിപ്ത ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണം ·7″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ചിത്രം 22.

AB ഒരു രേഖ; T അതിലെ ഒരു ബിന്ദു.

T ൽ ഒരു ചതുരരേഖ വരയ്ക്കുക. അതിൽ ·7″ നീളത്തിൽ CT അടയാളപ്പെടുത്തുക. C കേന്ദ്രമാക്കി CT ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.



22

<u>വാക്യം 16</u>. ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഒരു വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള രണ്ടു സ്പർശരേഖകളും തുല്യമായിരിക്കും. (ചിത്രം 21)
C കേന്ദ്രം. AT, AV ഇവ A യിൽ നിന്നുള്ള സ്പർശരേഖകൾ.

AT = AV എന്നു സിദ്ധം.

CT, CV ഇവ രണ്ടും യോജിക്കുക.

△ ATC, △ AVC ഈ ചതുരത്രികോണിൽ

AC = AC (കർണ്ണങ്ങൾ)

CT = CV (ഓരോവശം)

∴ △ATC ≡ △AVC

∴ AT = AV.

<u>സൂത്രവാക്യം</u>. r = ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം; d = കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരം; t = ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ നീളം. ഇവ മൂന്നും കൂടി ഒരു ചതുരത്രികോണമാണ്.

$\therefore d^2 = r^2 + t^2;$ $t^3 = d^2 - r^2$

$\therefore t = \sqrt{d^2 - r^2}$

ഉദാ: 2″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നു് 2·5″ ദൂരത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവുണ്ടു്. അതിൽനിന്നു് വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

$t^2 = 2{\cdot}5^2 - 2^2 = 6{\cdot}25 - 4 = 2{\cdot}25.$

$t = \sqrt{2.25} = 1{\cdot}5''$

സൂത്രവാക്യം. r, s രണ്ടു് സ്പർശവൃത്തങ്ങളുടെ ആരം.

d അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം.

പുറത്തു സ്പർശിക്കുന്നവയാണെങ്കിൽ $d = r + s$.

അകത്തു് സ്പർശിക്കുന്നവയാണെങ്കിൽ $d = r - s$.

ഉദാ: 1.6″, 2″ ഈ നീളത്തിൽ ആരം പിടിച്ചു് പുറത്തു സ്പർശിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

A കേന്ദ്രമാക്കി 1·6″ ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. അതിൽ AP എന്നൊരു ആരം വരച്ചു് നീട്ടുക. നീട്ടിയ ഭാഗത്തു് 2″ നീളത്തിൽ PB എടുക്കുക. B കേന്ദ്രമാക്കി 2″ ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

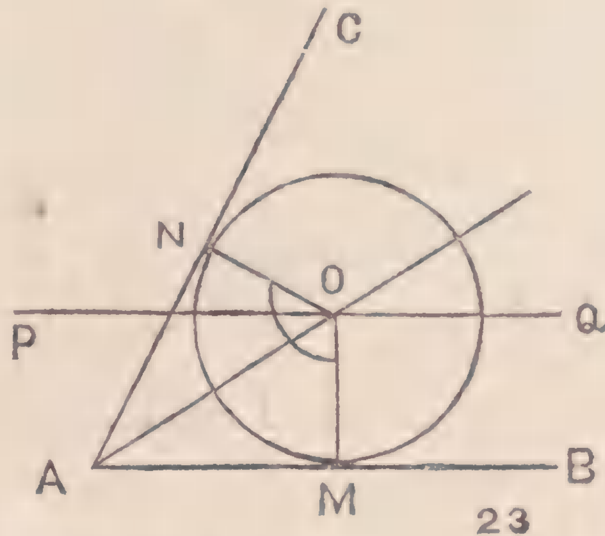
മേൽപ്പറഞ്ഞ അളവിൽ അകത്തു സ്പർശിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

A കേന്ദ്രമാക്കി 2″ ആരംപിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. അതിൽ AP എന്നൊരു ആരം വരയ്ക്കുക. APയ്ക്കകത്തു് 1·6″ നീളത്തിൽ PB അടയാളപ്പെടുത്തുക. B കേന്ദ്രമാക്കി 1·6″ ആരം പിടിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

ക്രിയ 5. രണ്ടു രേഖകളെ സ്പർശിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

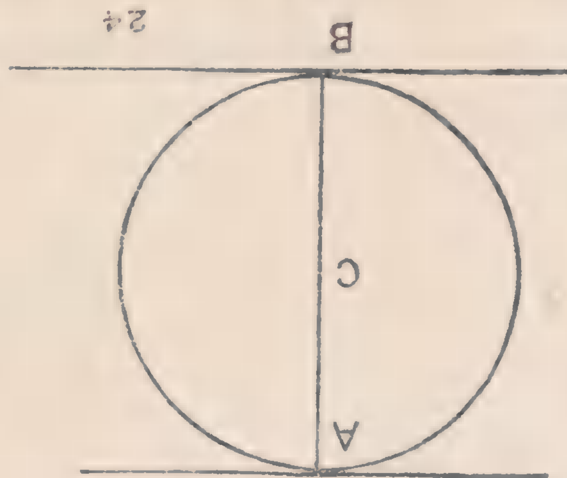
60° കോണിൽ ചരിഞ്ഞിരിക്കുന്ന രണ്ടു രേഖകളാണു് AB, AC. അവയെ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണം ·4″ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ചിത്രം 23.

∠BACയുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനി വരയ്ക്കുക. ABൽ നിന്നു് ·4″ അകലത്തിൽ PQ എന്നൊരു സമാന്തരം വരച്ചു് മദ്ധ്യഭാഗിനിയെ Oൽ സന്ധിപ്പിക്കുക.



ABക്കു ചതുരമായി OM വരയ്ക്കുക. O കേന്ദ്രമാക്കി OM ആരം പിടിച്ച് വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

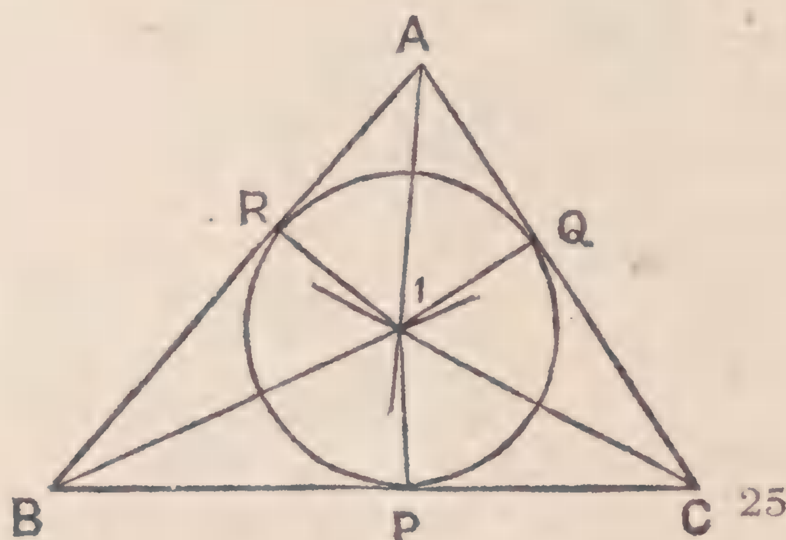
ക്രിയ 6. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ സ്പർശിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ചിത്രം 24.



സമാന്തരരേഖകൾക്കു ചതുരമായി AB വരയ്ക്കുക. അതിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദു C കണ്ടുപിടിക്കുക. C കേന്ദ്രമാക്കി CA ആരം പിടിച്ച് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

ഒരു ത്രികോണിന്റെ മൂന്നു ഭുജങ്ങളെയും സ്പർശിച്ചു കൊണ്ട് അതിനകത്തുള്ള വൃത്തത്തിന് ആന്തരവൃത്തം എന്നു പറയുന്നു.

ക്രിയ 7. ഒരു ത്രികോണിന്റെ ആന്തരവൃത്തം വരയ്ക്കുക. ചിത്രം 25.



ABC ഒരു ത്രികോണം. ∠B, ∠C ഇവയുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനികൾ വരച്ച് I ൽ സന്ധിപ്പിക്കുക. BCയ്ക്കു ലംബമായി IP വരയ്ക്കുക. I കേന്ദ്രമാക്കി IP ആരം പിടിച്ച് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. അതു് ആന്തരവൃത്തമായിരിക്കും.

∠Aയുടെ മദ്ധ്യഭാഗിനി Iൽക്കൂടി തന്നെ കടന്നുപോകും. IQ, IR, എന്ന ലംബരേഖകൾ രണ്ടും IPയ്ക്കു തുല്യമാണ്. BC, CA, AB ഇവ മൂന്നും ഈ വൃത്തത്തിൻെറ സ്പർശരേഖകളായിരിക്കും P, Q, R ഇവ അവയുടെ സ്പർശബിന്ദുക്കളുമാണ്.

$BP = BR$; $CP = CQ$; $AQ = AR$

അഭ്യാസം 37

1. 3 സെ. മീ. ആരംപിടിച്ച് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നു് 5 സെ. മീ. അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവെടുത്തു് അതിൽനിന്നു് വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. സ്പർശരേഖയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക. അളന്നുനോക്കി ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

2. ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു് ഒരു വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള സ്പർശരേഖകൾ രണ്ടിനും സമ്മുഖമായി കേന്ദ്രത്തിൽ വരുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. C കേന്ദ്രമായുള്ള രണ്ടു സവൃത്തങ്ങളിൽ അകത്തെ വൃത്തത്തിലുള്ള P എന്നൊരു ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖ പുറത്തെ വൃത്തത്തെ Aലും Bലും സന്ധിക്കുന്നു. എന്നാൽ AP = PB എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ നാലു സ്പർശരേഖകൾകൂടിയുണ്ടാകുന്ന ഒരു ചതുർഭുജമാണ് ABCD. എന്നാൽ AB + CD = AD + BC എന്നു തെളിയിക്കുക.

5. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ നാലു സ്പർശരേഖകൾകൂടി ഒരു ചതുരക്ഷേത്രമുണ്ടാകുന്നെങ്കിൽ അതു് ഒരു സമചതുരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

6. △ABC ൽ ∠B = 90°; BD⊥AC. എന്നാൽ BCDയുടെ പരിവൃത്തത്തിൻെറ ഒരു സ്പർശരേഖയാണ് AB എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. AB ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസവും P പരിധിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമാണ്. Pലുള്ള സ്പർശരേഖ Aലെ സ്പർശരേഖയെ Qലും Bലുള്ള സ്പർശരേഖയെ Rലും സന്ധിക്കുന്നു. AQ + BR = QR എന്നു തെളിയിക്കുക.

(S. S. L. C. Questions)

8. O കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലേക്കു് Cൽ നിന്നു് CP, CQ എന്ന സ്പർശരേഖകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. CAB എന്നൊരു രേഖ വൃത്തത്തെ Aലും Bലും സന്ധിക്കുന്നു. ABയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് M. എന്നാൽ C, P, M, Q ചക്രബിന്ദുക്കളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

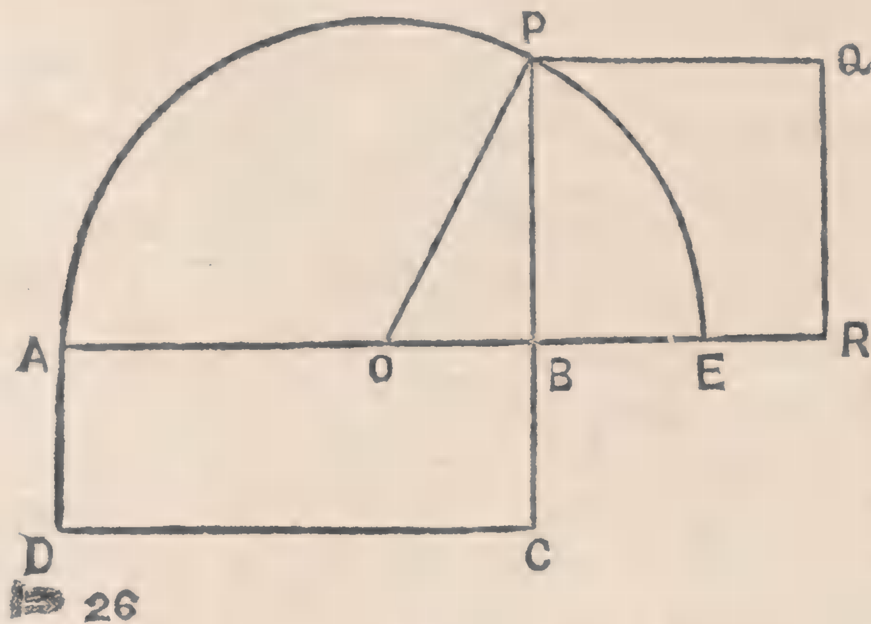
9. 4.5″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലേക്കു് Pൽ നിന്നുള്ള സ്പർശരേഖകളുടെ നീളം ഓരോന്നും 6″ ആകുന്നു. എന്നാൽ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നു Pലെയ്ക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കുക.

10. O കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ പരസ്പരം സമാന്തരമായി രണ്ടു സ്പർശകങ്ങളും അവയെ P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുന്ന മൂന്നാമതൊരു സ്പർശകവും വരച്ചിരിക്കുന്നു. ∠POQ ഒരു സമകോണാണെന്നു തെളിയിക്കുക, സമകോൺ = 90°.

അദ്ധ്യായം XV

സമചതുരക്രിയ

ക്രിയ 8. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിനു തുല്യമായി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. ചിത്രം 26.



ചി. 26

ABCD ഒരു ദീർഘചതുരം. AB നീട്ടി BCയ്ക്കു തുല്യമായി BE അടയാളപ്പെടുത്തുക. AEയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു കണ്ടുപിടിച്ച് O എന്നു പേർ കൊടുക്കുക. AE വ്യാസമാക്കി ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക. CB നീട്ടി അർദ്ധവൃത്തത്തിൽ സന്ധിപ്പിച്ച് ആ സന്ധിയ്ക്ക് P എന്നു പേർ കൊടുക്കുക. BP ഒരു വശമാക്കി BPQR എന്ന സമചതുരം വരയ്ക്കുക. അപ്പോൾ ABCD, BPQR ഇവ രണ്ടിന്റേയും വിസ്തീർണ്ണം തുല്യമായിരിക്കും.

$AB \cdot BC = BP^2$.

സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിനു് ഈ ക്രിയ ഉപകരിക്കുന്നു.

ഉദാ: ക്ഷേത്രഗണിതപ്രകാരം $\sqrt{3}$ എത്രയെന്നു കാണുക. അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{3}$ ഇഞ്ച് നീളമുള്ള ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക.

വിസ്തീർണ്ണം 3 ച. ഇ. ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു ചതുരക്ഷേത്രം സങ്കല്പിച്ചു് അതിൻെറ നീളവും വീതിയും കാണുക.

നീളം = 3 ഇ; വീതി = 1 ഇ.

ചിത്രം 21ൽ AB = 3ഇ., BC = 1ഇ. എന്നെടുത്തു് സമചതുരം വരയ്ക്കണം. അപ്പോൾ BPQRൻെറ വിസ്തീർണ്ണവും 3 ച. ഇ. ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു് BPയുടെ നീളം അളന്നാൽ അതു് $\sqrt{3}$ യ്ക്കു സമമാണു്. അതായതു് $\sqrt{3}$ ഇഞ്ചായിരിക്കും.

ഒരു ത്രികോണിനു തുല്യമായി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. ആദ്യമായി ത്രികോണിനു തുല്യമായ ദീർഘചതുരം വരച്ചു് പിന്നീടു് അതിനുതുല്യമായി സമചതുരം വരയ്ക്കണം.

ഒരു ചതുർഭുജത്തിനു തുല്യമായി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. ആദ്യമായി ചതുർഭുജത്തിനു തുല്യമായ ത്രികോൺ വരച്ചു് പിന്നീടു് അതിനു തുല്യമായ സമചതുരം വരയ്ക്കണം.

അഭ്യാസം 38

(S. S. L. C. Questions)

1. ഓരോ വശവും 3″ വീതമുള്ള ഒരു സമഭുജത്രികോണിനു തുല്യമായ സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

2. 3 ഇഞ്ചു നീളവും 1·8 ഇഞ്ചു വീതിയുമുള്ള ഒരു ദീർഘചതുരം വരച്ചു് അതിനു തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ള സമചതുരം നിർമ്മിക്കുക, സമചതുരത്തിൻെറ ഒരു വശം അളക്കുക.

3. വശങ്ങളുടെ നീളം 2·5 ഇഞ്ചു്, 1·6 ഇഞ്ചു് ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു ആയത ക്ഷേത്രം വരച്ചു് അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തോടു തുല്യ ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. അതിൻെറ ഒരു വശം കാണുക.

4. 7·5 സെ. മീ., 6·2 സെ. മീ., 5 സെ. മീ. വശങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു ത്രികോണിനു തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരച്ചു് ആ സമചതുരത്തിൻെറ ഒരു വശം അളക്കുക.

5. $\sqrt{12}$″ നീളമുള്ള ഒരു ഋജുരേഖ വരയ്ക്കുക.

ഉത്തരങ്ങൾ

അഭ്യാസം 1

(1) 211 (2) 68 (3) 4·697; 475020 (4) ·44 (5) 25:1 (6) 2 മ. 43 മി 34 മി.; 48 മി. (7) $px+qy$; $\frac{px+qy}{x+y}$ (8) $\frac{am+an-bm}{n}$
(9) 15·40

അഭ്യാസം 2

(1) $3\frac{1}{3}$ % ന. (2) 30 (3) 1600 രു. (4) 12% (6) 198 രു; 200 രു
(7) 3 രു. 2 ണ. (8) 50000; 10000; 4000; 1440. (9) 30 പ. 5 ഷി
(10) 8 രു. 12 ണ. (11) 1500 രു. (12) $8\frac{3}{4}$ % (13) 20 %
(14) $14\frac{18}{23}$ % (15) 8 % (16) $8\frac{1}{3}$ % (17) $18\frac{1}{12}$ % (18) 5:8
(19) 2 രു. 8 ണ. (20) 4 % ന. (21) 262 രു. 8 ണ.; 8 % ലാ.

അഭ്യാസം 3

(1) 15 (2) 145, 180, 200 (3) 15 (4) 1 രു. 8 ണ. (5) B ക്കു A 5 രുപയും C 3 രുപയും കൊടുക്കണം. (6) 1250 രു; 750 രു.
(7) A ക്കു 8 അണയും B ക്കു 4 അണയും C കൊടുക്കണം (8) 8.
(9) 58%, 42% (10) 6 (11) 11 (12) 64 (13) 875 രു; 925 രു.
(14) 3864 രു. (15) 200 രു; 300 രു; 240 രു. (16) 1353 രു; 737 രു; 330 രു. (17) 40°, 60°, 100°, 160°. (18) 20000 രു.
(19) 1800 രു; 1500 രു; 2000 രു. (20) 1800 രു: 600 രു. (21) 24

അഭ്യാസം 4

(1) 12 ഷി. (2) 300 രു. (3) 1000 രു. (4) 960 രു. (5) $12\frac{4}{5}$ ണ.
(6) $12\frac{4}{13}$ ണ. (7) 12 ണ. (8) $82\frac{1}{2}$% (9) $9\frac{4}{5}$ ണ.

അഭ്യാസം 5

(1) 58 രു. 15 ണ. (2) 4000 രു. (3) 3128 രു. 4ണ. 10പൈ; 8·38%
(4) 10000 രു. (5) 1230 രു. 4 ണ. (6) 1076 രു. 14 ണ. 3 പൈ.

(7) 1011 രു. 0 ണ. 7 പൈ. (8) 226 രു. 14 ണ.
(9) 1622 രു. 6 ണ. 5 പൈ; 357 രു. 9 ണ. 7 പൈ
(10) 3979 രു. 8 ണ. 6 പൈ (11) 5832 രു. (12) 275 രു.
(13) ആദ്യത്തതിൽ; 6 ണ. 3 പൈ. (14) 1488 രു. 10 ണ. 7 പൈ.

അദ്ധ്യായം 6

(1) 1547 പ. 2 ഷി. (2) ബാങ്ക്; സ്മിത്ത്; ഹെൻറി; 500 രു; ജൂൺ 4; 495 രു. 14 ണ. 3 പൈ (3) 1386 രു. (4) 3053 രു. 10 ണ.
(5) 618 രു. 12 ണ. (6) 24 രു. 11 ണ. 7 പൈ (7) 2709 രു. 6 ണ.

അദ്ധ്യായം 7

(1) $\frac{1}{m}+\frac{1}{m+5}=\frac{1}{n}$ (2) 1 മ. 40 മി. (3) 2; 22 രു; 20 രു; 30 രു.

അദ്ധ്യായം 8

(1) 30 (2) 2·48 P. M. (3) 24 (4) $14\frac{1}{2}$ മൈ. (5) 7 മൈ.
(6) 12 സെ. (7) $16\frac{1}{5}$ മൈ. (8) 176 അ; 15 മൈ. (9) $10\frac{2}{3}$ മൈ.
(10) 24 മൈ. (11) 330 അ.

അദ്ധ്യായം 9

(1) 5″ (2) 11″ (3) 5·5″ (4) 80 ഏ. (5) 741; ·741 (6) 20·8
(7) 595 ച. അ. (8) $3\frac{1}{3}$ ചെ; $1\frac{5}{6}$ ഏ; $\frac{11}{12}$ ഏ. (9) $11\frac{1}{2}$″ (10) $2(ab+bc+ac)$ ച.ഇ.; $(a+2t)(b+2t)(c+2t)-abc$ ക്യു.ഇ. (11) $218\frac{13}{18}$ മൈ.
(12) 294 (13) 101 രു. (14) 154 ച. ഇ.; 121 ച. ഇ. (15) $4\frac{1}{2}$ ച. ഇ. (16) 8 (17) 230 ഗ; $50\frac{10}{11}$ ഏ; $1\frac{1}{20}$ മൈ.; 5 ഏ. $21\frac{9}{11}$ സെ.
(18) 1482·25 (19) 1415 ച. അ. (21) 6 (22) 6·928
(23) 240 ച. അ.; 40·11 അ. (24) 73 രു. 3 ണ. 11 പൈ. (25) 33
(26) 121 ച. ഇ. (27) 45 രു. (28) 7·75 (29) 3 : 5; 9 : 25
(30) 140 ഗ; 12 ഏ. 73 സെ; 248·2 ഗ.

അഭ്യാസം 10

(1)50 ഗ്രാം. (2)1344 ച. അ. (3)6769 ഗ്രാം. (4)$13\frac{3}{4}$ ക്യൂ. അ; 2200 ച. അ. (5)4·675 പവ. (6)1·5 സെ. മീ. (7)60 ഗ്രാം. (8)13200. (9)$1966\frac{1}{4}$ പവ. (10)8·4 ഇ. (11)231 (12)$28\frac{4}{5}$മ. (13)1 അ. (14)$17\frac{1}{2}$ഏ. (15)330 ഗ്രാം; 286 ഗ്രാം. (16)$\frac{1}{3}$. (17)15 ഇ. (18)·17 മി. മി. (19)$3\frac{1}{2}$ അ. (20)$41\frac{2}{3}$ ഗ (21)$21\frac{1}{3}$ ഗ (22)2 മി. മി.

അഭ്യാസം 11

(1)$2\frac{2}{3}$ അ. (2)$47\frac{1}{7}$ ച. അ; 6 രു. 14 ണ. (3)704 ക്യൂ. ഇ. (4)$8\frac{1}{4}$ക്യൂ. ഇ. (5)1386 ക്യൂ. അ; 1078 ക്യൂ. അ. (6)960 ച. അ. (7)വലുതു് (8)$1039\frac{1}{2}$. (9)648000. (10)4·36 ഇ. (11)56 മി. (12)1രു. 8ണ. 9പൈ. (13)26400 ക്യൂ. അ. (14)418 ച.ഇ.; $47\frac{2}{3}$പവ. (15)$621\frac{5}{9}\frac{9}{6}$ഗ്രാം; 15 രു. 13ണ. (16)$133\frac{1}{3}$ മീ; 8 സെ. മീ. (17)1:2. (18)3 ഇ. (19)1672 ച. ഇ; 5037 ക്യൂ. ഇ. (20)33·1%. (21)880 ച. അ. (22)574 രു. 9ണ. 8പൈ. (23)101178ക്യൂ. അ.; 990 രു. (24)$16\frac{16}{21}$ ക്യൂ ഇ; $33\frac{11}{21}$ക്യൂ. ഇ.; 4ഇ; $75\frac{3}{7}$ ച. ഇ.

അഭ്യാസം 12

(1)298 പ. 8 ഷി. 9പെ. (2)4800 രു. (3)60 രു. (4)2016 രു. (5)909 പ. 7ഷി. 6പെ. (6)3 പ. നഷ്ടം. (7)$3253\frac{1}{2}$ രു. (8)455 ഡാ. (9)$5913\frac{3}{4}$ രു. (10)850 ഡാ. (11)6000 രു. (12)16രു. 12ണ. 9പൈ. ലാഭം. (13)53രു. 5ണ. 4പൈ. നഷ്ടം. (14)34 രു. 2ണ. ലാഭം. (15)$80\frac{3}{4}$ രു. (16)525 രു. നഷ്ടം. (17)7രു. (18)13 രു. 8ണ. (19)18രു. (20)93 രു. 10ണ. ലാഭം. (21)രണ്ടാമത്തേതു്; 6ണ. (22)900 രു.

അഭ്യാസം 13

(1)1190 രു. (2)665 രു. (3)935 രു. (4)1331രു. 4ണ. (5)120രു. (6)50; 56രു. 4ണ. (7)200; 40രു. (8)15. (9)40. (10)60 (11)3320രു. (12)7385രു. (13)107രു. 3ണ. $7\frac{1}{2}$പൈ. (14)187രു. 8ണ. (15)6. (16)2625 രു. (17)4·63%. (18)5·65%.

അഭ്യാസം 14

(1)2535രൂ. (2)2590രൂ. 10ണ. (3)2148 രൂ. (4)2026രൂ. 8ണ. (5)48 രൂ. (6)2000രൂ.; 80 രൂ. (7)4000രൂ; 120 രൂ. (8)1600 രൂ. (9)1200 രൂ. (10)1800രൂ. (11)3237 രൂ. 8ണ. (12) 3016 രൂ. (13)87രൂ. 3ണ. (14)83രൂ. 14ണ. (15)1200രൂ. (16)1471രൂ. 12ണ. (17)3·35% (18)3·72%.

അഭ്യാസം 15

(1 17262 രൂ; 840രൂ; 4·87%. (2)128; 89രൂ. 9ണ. 7പൈ;4·86%. (3)4255രൂ; 140രൂ; 3·29%. (4)1685 രൂ. 15ണ. (5)3768 രൂ. 12ണ. (6)90 രൂ. 10ണ. (7)211½രൂ. (8)258¾ രൂ; 38⅓%. (9)2400രൂ. (10)262½ രൂ. കുറവ്. (11)228രൂ. 12 ണ. (12)12 രൂ. കുറവ്

അഭ്യാസം 16

(1)2000 പ; 116പ; 5⅓%. (2)13രൂ. 10ണ. 9 പൈ. കൂടുതൽ. (3)40. (4)190രൂ. (5)14400രൂ. (6)144രൂ. (7)17730രൂ. (8)10000രൂ; 9450 രൂ; 5·7%. (9)306¼ രൂ. (10)800 രൂ. (11)4125 രൂ; 135രൂ. (12)15രൂ. കൂടുതൽ. (13)5⅓%; 215 രൂ. 13ണ. 4പൈ. (14)200. (15)രണ്ടാമത്തേതു്; 1700 രൂ; 7½ രൂ. കൂടുതൽ; (16)8¾ രൂ. കൂടുതൽ. 6¼%. (17)ആദ്യത്തേതു്. (18)6000 രൂ; 205 രൂ. 10 ണ.

അഭ്യാസം 17

(1)x^2+5. (2)$10a^2+2$. (3)$4x+6z$. (4)1. (5)$\frac{1}{2}$. (6)210. (7)0. (8)$8\frac{1}{6}$. (9)$\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. (10)$5x+12$; -5. (11)$-4x+3y$; -17. (12)$2b+4c$. (13)$12a-12b$. (14)$S=\frac{v^2}{24}$; 84. (15)$\frac{Pr^2}{10000}$.

(16)$c^3=a^3+b^3$. (17)$E=\frac{7\cdot5(P-1\cdot5)}{8P}=\frac{15}{16}\left(1-\frac{3}{2P}\right)$.

(18)$V=\frac{550H}{T_1-T_2}$. (19)$b=\frac{A}{2h}-l$. (21)x^2-2y. (23)$\frac{P^2+Q^2}{2}$.

(24)P^2-2.

അഭ്യാസം 18

(1) -1. (2) 11. (3) -5. (4) 2. (5) 9. (6) $\frac{179}{438}$. (7) 3. (8) $8, 3$. (9) $2, -1$. (10) $-5, 3$. (11) $-3, -2; 3\frac{1}{2}$. (12) $5, 2$. (13) $2, 5$. (14) $11, 7$. (15) $2, 1; 5; 3$. (16) $1, 1; 2$. (17) $12\frac{4}{13}, 38\frac{6}{13}$. (18) $7, 5$. (19) $\frac{1}{6}, \frac{1}{15}$. (20) 15ഏ; 25ഏ. (21) 4 മ. (22) 30മൈ; 15മൈ; (23) 56. (24) തിരു. നിന്നു $23\frac{1}{3}$മൈ; 9·40 a.m. (25) 4മ. (26) 1 ഒ.

അഭ്യാസം 19

(1) a; axy. (2) a; a^2x. (3) a; a^2. (4) a^2; a^4. (5) a; a^2x^2. (6) ab; a^3b^3. (7) abc; $a^2b^2c^2$. (8) a; a^3bc. (9) b; a^2b^2c. (10) $3xy^3$; $18x^2y^3$. (11) $2x^2y$; $10x^3y^3$. (12) $7p^2q^2r^2$; $14p^3q^3r^3$. (13) $4m^2n$; $16m^3n^2$. (14) $5xy$; $60x^3y^3$. (15) $3ab$; $81a^4b^3$. (16) 2; $12a^2b^2$. (17) 1; $10x^2y^2$. (18) 4; $40p^2$. (19) $2c$; $30a^2b^2c^3$. (20) $5b^2c$; $30ab^3c^3$.

അഭ്യാസം 20

(1) $x(a-x)$. (2) $x(x-a)$. (3) $4p(p-3)$. (4) $b(b+1)$ (5) $7(1-2a^2)$. (6) $a^2(a+6p)$. (7) $qr(p-s)$ (8) $3x(2x-3x^2+1)$. (9) $7x(-2x+a)$. (10) $2ax(-2a-3x+1)$. (11) $-y(b-y)$. (12) $-2(x+1)$. (13) $-q^2(-5q+1)$. (14) $-x(-y-2)$. (15) $-3b(-a+2c)$. (16) $-ab(-1+ab)$. (17) $-xy(-x-y)$. (18) $-5ab(-a^2+3ab+2b^2)$. (19) $-ab^2(8ab+1)$. (20) $-axy(x-y+xy)$.

അഭ്യാസം 21

(1) $(a+b)(a-b)$. (2) $(x+2)(4x+3)$. (3) $(a+1)(a^2+1)$. (4) $(1-x)(1-a)$. (5) $2y(a+b)$. (6) $2x(p-q)$. (7) $(x+y)(-x-y)$. (8) $(x-2)(3x+3)$. (9) $(x-a)(5-3a)$. (10) $6b(a-2b)$

അഭ്യാസം 22

(1)$(a+b)(a-b)$. (2)$(a+1)(a-1)$. (3) $(a+3)(a-3$ (4)$(1+x)(1-x)$. (5)$(2+x)(2-x)$. (6)$(2a+5)(2a-5)$. (7)$(a^2+b)(a^2-b)$. (8) $(2+x^3)(2-x^3)$. (9)$(p^2+7)(p^2-7)$. (10)$(2c^2+1)(2c^2-1)$. (11)$(1+3ab)(1-3ab)$. (12)$(3+ab)$ $(3-ab)$. (13)$(10+ax)(10-ax)$. (14)$(1+10ax)(1-10ax)$.

അഭ്യാസം 23

വർഗ്ഗമൂലംമാത്രം.

(1)$x+2$. (3)$2b-1$. (5)$10+c$. (7)$(2a-b)$. (8)$3x+2y$. (9)$1+x$. (10)$1-a$. (12)$1+x^2$. (14)x^2-1. (15)a^2-b^2. (16)x^2+y^2. (17)$xy+1$. (18)$1-5ab$. (19)$x-9$.

അഭ്യാസം 24

(1)$(a-x)(a+y)$. (2)$(a-1)(2a+3)$. (3)$(5x+a)(x+y)$. (4)$(a+b)(c+d)$. (5)$(x-p)(x+q)$. (6)$(a+b)(c-d)$. (7)$(x-a)(x-b)$. (8)$(x+2)(3x-1)$. (9)$(5-2a)(3-2a)$. (10)$(m-n)(x+y)$. (11)$(5x-a)(x-b)$. (12)$(x-a)(x-b)$. (13)$(a-1)(a^2+1)$. (14)$(1+x)(1+x^2)$. (15)$(x+5)(x-6)$. (16)$(1-x)(1-x^2)$

അഭ്യാസം 25

(1)$(x+4)(x+3)$. (2)$(x+5)(x+2)$. (3)$(x+3)(x+2)$. (4)$(x+6)(x+4)$. (5)$(a-5)(a-2)$. (6)$(a-3)(a-1)$. (7)$(a-2b)(a-4b)$. (8)$(a-9b)(a-2b)$. (9)$(2x+1)(x+3)$. (10)$(3p+5)(2p+3)$. (11)$(2b-3)(5b-1)$. (12)$(3y-4)(4y-3)$. (13)$(x+5y)(x-3y)$. (14)$(x-5y)(x+3y)$. (15)$(y+6)(y-2)$. (16)$(y-6)(y+2)$. (17)$(2a+1)(a-4)$ (18)$(2a-1)(a+4)$. (19)$(3b+2c)(b-2c)$. (20)$(3b-2c)(b+2c)$. (21)$(a+3)(a+2)$. (22)$(a-3)(a+2)$. (23)$(a+3)(a-2)$ (24)$(a-6)(a+1)$

(25)$(x+2)(x+1)$. (26)$(x-2)(x-1)$. (27)$(x-2)(x+1)$ (28)$(x+2)(x-1)$. (29)$(p+3)(p+1)$. (30)$(p-3)(p+1)$. (31)$(p-3)(p-1)$. (32)$(p+3)(p-1)$. (33)$(2x+3)(x+4)$. (34)$(x-1)(3x-5)$. (35)$(3+2x)(2+3x)$. (36)$(4+3x)(1-4x)$. (37)$(5-2a)(1-3a)$. (38)$(3-x)(5+2x)$. (39)$(4y+1)(y-3)$. (40)$(3x+1)(x+2)$.

അദ്ധ്യായം 26

(1)$3a(3a+4b).(3a-4b)$. (2)$7(a+2b)(a-2b)$. (3)$ab(a+b)(a-b)$. (4)$2a(2x+3).(2x-3)$ (5)$(a+b+c)(a+b-c)$. (6)$(a+x+y)(a-x-y)$. (7)$(p+a-b)(p-a+b)$. (8)$x-y+a+b)(x-y-a-b)$. (9)$(x+y+a-b)(x+y-a+b)$. (10)$(3x+2y)(x-2y)$. (11)$(2x+3y)(2x-9y)$. (12)$8(x-y)(x+3y)$ (13)$(-a-b-2c)(3a-3b+4c)$. (14) $4(p+2q+r)(-2p+3q-3r)$. (15)$4ab$. (16)$(5x-y)(x+5y)$. (17)$(a+b)(a-b+2)$. (18)$4a(b-1)$. (19)$5(a+b)(a+11b)$. (20)$x(x-2)(x-6)$. (21)$3(x-5)(x+2)$. (22)$-2(2x+3)(x+3)$. (23)$7a(a-b)$. (24)$a(a-5)^2$. (25)$2x(1+4a)^2$. (26)$(1+a^2)(1+a)(1-a)$. (27) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$. (28)$(b^2+1)(b+1)(b-1)$. (29)$(x-4)(x+3)(x-2)(x+1)$ (30)$(x+4)(x+1)(x+6)(x-1)$. (31)$(x^2-2)(x+2)(x-2)$. (32)$a^3x^3(a^2+x^2)(a+x)(a-x)$. (33)$3x(2y-x)$. (34)$a+b)(c+d)(a-b)(c-d)$. (35)$(a+b)^3(a-b)$. (36)$(x+y)^2(x-y)^2$ (37)$(a+b+c)(a+b-c)$. (38)$(a+b+c)(a-b-c)$. (39,$(x^2-x+2)(x+2)(x-1)$. (40)$(1+x-y)(1-x+y)$.

അദ്ധ്യായം 27

(1) $(7x-3)(x+6)$. (2)$3(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$. (3)$(7x+3y)(x+9y)$(4)$(3x-4)(7x+3)$. (5)$(x+1)^3(x-3)$. (6)$(x-a)^3(x+a)$ (7)$(4x-1)(x-4)$. (8)$(x+1)^2(x-1).(x+5)$. (9)$4(x+1)(2x-3)(x-2)(x-1)$. (10)$(a+b-c)(a-b+c)$. (11)$3(a-1)$

$(a+1)$. (12)$(a-b)(a+1)$. (13)$(2x+3y)(4x-5y)$. (14)$(x-2y)$ $(x+2y+1)$. (15)$(2x-3)(5x+7)$. (16)$(x+y-z)(x-y+z)$. (17)$(x-6)(x+1)(x-4)(x-1)$. (18)$(4+3x+3y)(4-3x-3y)$. (19)$(6a+9b+1)(4a+6b-5)$. (21)209. (22)$2a$; (a^2+2a+2) (a^2-2a+2).

അഭ്യാസം 28

(1)$(x-2y$; $6(x-2y)$. (2)$x+a$; $a(x+a)(x-a)$ (3)$2x+3$; $y(2x+3)(2x-3)$. (4)$x+a$; $a(x+a)^2(x-a)$. (5)$a-b$; ab $(a+b)(a-b)^2$. (6)$2(x+1)$; $12(x+1)^2(x-1)$. (7)$x+1$; $(x+1)$ $(x-3)(x+2)$. (8)$x+3$;$(x+3)(x-3)(x+2)$. (9)$2x-1$; $(2x-1)$ $(2x-3)(x+4)$. (10)$1+3x$;$(1+3x)(1-3x)(3+x)$.(11)$a(a)+2b)$; $a^2b\ (a+2b)^2(2a-b)(2a+b)$. (12) $5(x-1)$; $10x(x-1)$ $(x+1)(2x-1)$. (13)1; $(x+1)(x+2)(x+3)$. (14)abc; $abc(a-b)$ $(b-c)(c-a)$. (15) a; $a^2(b-c)(a-b)$. (16) x; $x^2(x+1)$ $(x+2)$ (17) 1;$x(x+1)(x-1)$. (18) $x-1$; $x(x-1)^2(x+1)$. (19)$x+2$; $(x+2)(x-2)(x-3)$. (20)1; $(x+1)(x-1)\ 2x-1)$. (21)$(2x+1)(2x+3)$. (22)$12a^2(a-b)^2$. (23)$36(x-y)^2(x+y)^2$. (24)$(x+1)(x-1)$ $(7x-2)(7x+2)$ (25) $3x^2y$; $60x^3y^3\ (x+y)^2$ $(x-y)^3$.

അഭ്യാസം 29

(1) $\frac{yz}{x^2}$. (2) $\frac{4bc}{9a}$. (3) $\frac{x-y}{2(x+y)}$. (4) 1. (5) $\frac{x(x-2y)}{2y}$.

(6) $\frac{(x+3)(ax-1)}{3}$. (7) $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$. (8) $\frac{2(x+2)(x-2)}{5(x+1)(x-1)}$.

(9) $\frac{x}{x-3}$. (10) $\frac{(a+1)(a-1)}{2a(a+2)(a-2)}$. (11) $\frac{x(4a+15x)}{18a^2}$.

2) $\frac{2y-3x}{12x^2y^2}$. (13) $\frac{bc^2-ca^2+ab^2}{a^2b^2c^2}$. (14) $\frac{x+14}{(x-2)(x+2)}$.

(15) $\frac{ax-1}{a}$. (16) $\frac{b+a}{b}$. (17) $\frac{a-b}{b}$. (18) $\frac{x^2-1}{x}$.

(19) $\frac{x^2+1}{x}$. (20) $\frac{x}{x+a}$. (21) $\frac{x+2a}{x+a}$. (22) $\frac{x}{x-a}$.

(23) $\frac{x-2a}{x-a}$. (24) $\frac{5x-3y}{(x+y)(x-y)}$. (25) $\frac{a(a-2)}{(a+1)(a-1)}$.

(26) $\frac{4+x}{2+x}$. (27) $\frac{-2ab}{(a+b)(a-b)}$. (28) $\frac{3(x^2-10)}{(x-1)(x-2)(x-5)}$

(29) $\frac{6xy}{(x-y)(x+2y)^2}$. (30) 0. (31) $\frac{1}{x-2}$.

(32) $\frac{-4}{(a-1)(a-2)(a-3)}$. (33) $(x-4)(x-5)$. (34) $\frac{4+y^2}{2y(2-y)}$

(35) $\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. (36) $\frac{x}{x-y}$. (37) $\frac{1}{a-b}$.

(38) 0. (39) $\frac{4ap}{(a-p)(a+p)}$. (40) $\frac{2(a^2+p^2)}{(a-p)(a+p)}$. (41) 0.

(42) $\frac{b}{a-2b}$. (43) $\frac{4b^3}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}$. (44) 1.

അഭ്യാസം 30

(1) ± 3. (2) ± 5. (3) ± 1. (4) ± 3. (5) $\pm \frac{3}{2}$. (6) ± 2. (7) ± 1. (8) ± 3. (9) $-2, 7$. (10) $-1, \frac{1}{2}$ (11) $-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$. (12) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$. (13) $2, -1$. (14) $6, 5$. (15) $-7, -8$ (16) $-9, 4$. (17) $-\frac{3}{2}, 5$. (18) $-\frac{1}{3}, -2$. (19) $\frac{2}{5}, \frac{5}{2}$. (20) $-\frac{7}{2}, 12$. (21) $11, -3$. (22) $-1, \frac{1}{4}$. (23) $4, 3$. (24) $-3, 2$. (25) $\frac{8}{9}, -\frac{1}{3}$ (26) $\frac{7}{3}, -2$. (27) $3, -\frac{6}{5}$. (28) $-\frac{4}{5}, 4$. (29) $-\frac{3}{7}, 2$. (30) $1, 2$. (31) $-\frac{3}{2}, 5$. (32) $-6, 5$. (33) $\frac{5}{2}, -2$. (34) $20, -17\frac{1}{2}$. (35) $20, -16$. (36) $10. -\frac{2}{5}$. (37) $2. -\frac{1}{8}$. (38) $3, -\frac{4}{5}$. (39) $2, 4\frac{7}{8}$. (40) $12, -4$. (41) $5, -2$. (42) $(6, -24)$ (43) $-2, -3$. (44) $5, -\frac{3}{2}$.

അഭ്യാസം 31

(1) 18. (2) 15 രൂ. (3) 7 മൈ. (4) 25 മൈ. 20 മൈ. (5) 9. (6) 15 മി. 12 മി. (7) 10 ല. (8) 8 മ. (9) 10, 15. (10) $7\frac{1}{2}$ മൈ.

(11) 5 അ., 4 അ. (12) 49 ച. ഇ., 81 ച. ഇ. (13) 12 അ. (14) 15 അ., 12 അ. (15) 15 ഇ., 10 ഇ. (16) 60 അ. 50 അ. (17) 16 മൈ. 15 മൈ. അല്ലെങ്കിൽ 9 മൈ., 8 മൈ. (18) 4, 5. (19) $3\frac{1}{3}$ മൈ., 3 മൈ. (20) 4 ഗ. (21) 9, 3. (22) 11, 15. (23) $27\frac{1}{2}$ മൈ. (24) 15 മൈ. (25) 8 അ., 12 അ. (26) 2 ഗ. (27) 7 മൈ. (28) 25 അ., 11 അ, 36 അ. (29) 28 ഗ, 10 ഗ. (30) 5. (31) 3 ഗ. (32) $6\frac{1}{2}$.

അഭ്യാസം 32

(9)$3\frac{1}{2}$. (10)−·7. (11)4·8, 1·2. (12)1·1. (13)−17. (14)·3, −·4. (15)5,10. (16)2. (17)−2,10. (18)5,−3. (19)4.

അഭ്യാസം 33

(2) 36°, 72°, 72°. (8) 62 അ. (10) 473·2 അ. (11) 75 അ., 25 അ., 43·3 അ. (13) 3·46 ച. ഇ., 1·73 ഇ; (14) 18. (17) 12·2 സെ. മീ. (18) 162°. (22) ചെറുത്, ·48 ഇ.

അഭ്യാസം 34

(1) 4 ഇ. (2) 4·47 ഇ. (3) 7·81 സെ. മീ. (4) ·58 സെ. മീ., 8·58 സെ. മീ. (5) 1·07 സെ. മീ. (6) 3·25 സെ. മീ. (18) 3·67. (19) 6 സെ. മീ. (20) 4·2 സെ. മീ.

അഭ്യാസം 35

(13) 36°.

അഭ്യാസം 36

(8) 40°. (9) 151°.

അഭ്യാസം 37

(4) 4 സെ. മീ. (9) 7·5 ഇ.

3rd April 1952
10—12

ELEMENTARY MATHEMATICS

FIRST PAPER [Time 2 Hrs.

['A' വിഭാഗത്തിൽപ്പെട്ട ചോദ്യങ്ങൾ എല്ലാം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. എന്നാൽ 40ൽ കവിഞ്ഞ മാർക്ക കൊടുക്കുന്നതല്ല. 'B' വിഭാഗത്തിൽപ്പെട്ട ചോദ്യം നിർബന്ധിതമാണ്. അതിന് 10 മാർക്കുണ്ട്].

SECTION A

I. ഒരു മണിയുണ്ടാക്കാനായി ചെമ്പും, ഈയവും, നാകവും കൂട്ടിച്ചേർത്തു കിട്ടിയ ലോഹത്തിൽ ചെമ്പും ഈയവും 5 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും ഈയവും നാകവും 3 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും ഉണ്ട്. എന്നാൽ 5 cwts തൂക്കമുള്ള ഒരു മണി വാർക്കുന്നതിനു ഈ മൂന്നു ലോഹങ്ങളും എത്ര പൗണ്ടുവീതം ചേർക്കണം? 4

II. ഒരു സ്കൂളിലുള്ള 600 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 10·75 ആയിരുന്നു. 80 കുട്ടികളെ കൂടുതലായി ചേർത്തപ്പോൾ ആകെയുള്ള കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 10·375 ആയിത്തീരുന്നു. എന്നാൽ കൂടുതലായി ചേർത്ത കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സെന്ത്? 4

III. ഒരു തോട്ടിൽ x മൈൽ അകലെയായി A, B എന്ന രണ്ടു ബോട്ടുകടവുകൾ ഉണ്ട്. നിശ്ചലജലത്തിൽ മണിക്കൂറിനു 6 മൈൽ വേഗം ഓടുന്ന ഒരു ബോട്ടിനു A യിൽ നിന്നു B യിലേക്കും, ഉടൻതന്നെ തിരിച്ചു A യിലേക്കും പോകാൻ തോട്ടിൽ ഒഴുക്കില്ലാത്തപ്പോൾ എന്തു സമയം വേണം? തോട്ടിൽ മണിക്കൂറൊന്നിനു 2 മൈൽ വേഗതയുള്ള ഒഴുക്കുണ്ടെങ്കിൽ ഈ യാത്രകൾക്ക് വേണ്ട സമയം കൂടുതലോ കുറവോ എത്ര? $x = 30$ ആയാൽ നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം എന്ത്? 4

IV. താഴെപ്പറയുന്നവ കണക്കാക്കാനുള്ള വാക്യങ്ങൾ (formula) എഴുതി, ആ വാക്യങ്ങളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന അക്ഷരങ്ങൾ എന്തിനെ കുറിക്കുന്നു എന്നു പറയുക :—

(a) ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ (cylinder) ആകെയുള്ള തലവിസ്തീർണ്ണം (total surface area)

(b) ഒരു സൂചീഘാതത്തിന്റെ ഘനമാനം (volume of a cone).

Marks

(*c*) കൂട്ടപലിശക്രമത്തിനുള്ള തുക (amount at compound interest)

(*d*) ഒരു സമലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം (area of a trapezium). 4

V. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ (triangle) വശങ്ങൾ (sides) a, b, c യും അർദ്ധപരിധി [semiperimeter— $\frac{1}{2}(a + b + c)$] s ഉം ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ എന്നു വാക്യമായിരിക്കും. ഈ വാക്യം ഉപയോഗിച്ചു്, $AB = 100$, $BC = 180$, $CD = 130$, $DA = 150$ and $AC = 120$ ഗജം വീതമുള്ള $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജാകൃതി കളത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം, ഏക്കർ, സെന്ററായി കാണുക. 8

VI. ഒരു നിലനന (bankrupt) 40,000 ഉറുപ്പികയുടെ ബാദ്ധ്യതയും (liabilities) 32,400 ഉറുപ്പികയുടെ ആസ്തിയും assets) ഉണ്ടു്. ആസ്തിയിൽ 5/8 ഭാഗത്തിനു് 80% വും ബാക്കിയുള്ളതിനു ഉറുപ്പികക്കു് 13ണ. 4 പൈ വീതാംശവും (dividend) മാത്രമെ പിരിഞ്ഞു കിട്ടുന്നുള്ളു. ബാദ്ധ്യതയുടെ 2% വരുന്ന തുക ചിലവുകൾക്കു് (expenses) ഉപയോഗിച്ചാൽ, ഉത്തമർണ്ണന്മാർക്കു് (creditors) ഉറുപ്പികക്കു എന്തു വീതാംശം (dividend) കൊടുക്കാം? 8,000 ഉറുപ്പിക കിട്ടാനുള്ള ഉത്തമർണ്ണനു എന്തു തുക കിട്ടും? 6

VII ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ സൈക്കിളൊന്നിനു് 180 ഉറുപ്പിക വീതം വിററുകൊണ്ടിരുന്നപ്പോൾ 15% ലാഭം കിട്ടിവന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ വാങ്ങിയ വിലയെന്തു്? വാങ്ങിയ വില $12\frac{1}{2}$% കൂടിയാൽ, 15% ലാഭം കിട്ടാൻ അതിനെ എന്തുവിലയ്ക്കു വിൽക്കണം? 6

VIII. വൃത്താകൃതിയിലുള്ള (circular) ഒരു തടാകത്തിനു ചുററും 7 ഗജം വീതിയിൽ ഒരു റോഡുണ്ടു്. ഇതിന്റെ അകത്തെ പരിധി (inner circumference) അര മൈലാണെങ്കിൽ, പുറത്തെ പരിധിയും (outer circumference) വിസ്തീർണ്ണവും (area) എന്തു? 6

IX. ഉപയോഗം നിമിത്തം ഒരു യന്ത്രത്തിനു ഓരോ ആണ്ടിലും വിലയിൽ $12\frac{1}{2}$% കുറവു വരുന്നതായി കരുതപ്പെടുന്നു. എന്നാൽ

Marks

25,600 രൂപയ്ക്കു വാങ്ങിയ ഒരു യന്ത്രത്തിനു് 2 വർഷം ഉപയോഗിച്ച ശേഷം എന്തു വില മതിക്കാം.

അപ്പോൾ അതിനെ 20,580 രൂപയ്ക്കു വിററാൽ മതിപ്പുവിലയിൽ എത്ര ശതമാനം ലാഭമോ, നഷ്ടമോ എന്നു കാണുക — 6

X. രണ്ടു ഗോളസ്തംഭങ്ങൾ (cylinders) ഉള്ളവയിൽ ഒന്നിനു് 14" വ്യാസവും (diameter) 12" പൊക്കവും (height) മറേറതിനു് 12" വ്യാസവും 14" പൊക്കവും ഉണ്ടു്. ഇവയിൽ എതിനാണു് കൂടുതൽ ഘനമാനം (volume) എതിനാണു് കൂടുതൽ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം (total surface area) എന്നു കാണുക. — 5

XI. 7" വ്യാസത്തിൽ ഈയം കൊണ്ടുള്ള അർദ്ധഗോളത്തെ (hemisphere) ഉരുക്കി 7" വ്യാസമുള്ള ഒരു സൂചിഖാതം (cone) ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതിനു എന്തു പൊക്കം കാണും? — 5

XII ആറു മാസത്തെ കാലാവധിക്കു 1952 ജനവരി 5-ാനു- എഴുതിയ 4,562 രൂ. 8 അണയുടെ ബില്ലിനെ 1952 ഏപ്രിൽ 3-ാനു- $6\frac{1}{4}$% നിരക്കിനു മാറിയാൽ ബില്ലുടമസ്ഥനു എന്തു തുക കിട്ടും? — 6

XIII. ഓഹരി (share) ഒന്നിനു് 40 രൂപവീതം അടച്ചിട്ടുള്ള (paid up) 50 രൂപയുടെ 80 ഓഹരികൾ ഒരാൾക്കുണ്ടു്. $4\frac{3}{8}$% ലാഭവീതം (dividend) കമ്പനി കൊടുക്കുന്നതായാൽ അയാൾക്കു എന്തു ആദായം കിട്ടും?

ഈ ഓഹരികളെ 42 രൂപവീതം വിററു കിട്ടിയ തുകയെ $5\frac{1}{8}$% ലാഭവീതം കിട്ടുന്ന സ്റ്റാക്കിൽ 112 രൂപ വിലയുള്ളപ്പോൾ നിക്ഷേപിച്ചാൽ അയാളുടെ മുൻ ആദായത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാററമെന്തു? — 6

SECTION B

XIV. (*a*) ലഘൂകരിക്കുക (Simplify):—

$$\frac{3a^3b^2c}{4bc^2} \times \frac{5b^3c^2a}{6ca^2} \div \frac{8ab^2}{7c^3a^2b}$$

$a=2,\ b=-2,\ c=-1$ ആയാൽ നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തിന്റെ വില കാണുക. — 2

(b) ലഘൂകരിക്കുക :—

$$(2x+3)^2-(3x-2)^2-(2x+3)(3x-2).$$ 2

(c) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക (solve) :—

$$\frac{5m-4}{2}-\frac{6-3m}{4}=\frac{3m-4}{5}+\frac{5m-3}{2}.$$ 2

(d) ഒരാൾ ഏതാനും ആറഞ്ചുകൾ ഒന്നിന്ന് 2 അണ 6 പൈ വീതവും അതിന്റെ രണ്ടിരട്ടി എണ്ണം ഒന്നിന്നു 1 അണ 8 പൈ വീതവും വാങ്ങി 14 രൂ 9 ണ. 4 പൈ. കൊടുത്താൽ ഓരോ ഇനത്തിലും വാങ്ങിയ ആറഞ്ചുകൾ എത്ര? 4

ഉത്തരങ്ങൾ

I 240, 192, 128. II 6·7125

III. $\frac{x}{3}$; $\frac{x}{24}$ ക്രൂ; 10; $1\frac{1}{4}$.

IV $2\pi r(r+h)$; $\frac{1}{3}\pi r^2h$; $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$; $\frac{1}{2}h(a+b)$.

V 2 ഏ. $71\frac{1}{2}$ സെ. VI 10.21 ണ; 5105 രൂ.

VII 156 രൂ. 8 ണ. 4 പൈ; 202 രൂ. 8 ണ.

VIII 924 ത; 3234 ച.ത. IX 19600 രൂ; 5%.

X 1848 ഘ. ഇ; 1584 ഘ. ഇ; 836 ച. ഇ; $754\frac{2}{7}$ ച. ഇ.

XI 7 ഇ. XII 4487 രൂ. 8 ണ. XIII 144 രൂ; 16 രൂ.

XIV (a) $\frac{35a^3b^3c^3}{64}$; 35. (b) $-11x^2+19x+11$.

(c) $-\frac{2}{11}$. (d) 40; 80.

3rd April 1952
2—4

ELEMENTARY MATHEMATICS

SECOND PAPER

[Time 2hrs.

നോട്ട്:—[A, B വിഭാഗത്തിൽപ്പെട്ട എല്ലാ ചോദ്യങ്ങളും ചെയ്യാവുന്നതാണ്. എന്നാൽ ഓരോ വിഭാഗത്തിലും 20-ൽ കവിഞ്ഞ് മാർക്ക് കിട്ടുന്നതല്ല

C വിഭാഗം നിർബന്ധിതവും 10 മാർക്കുകളുള്ളതുമാണ്]

PART A

MARKS

I. ഘടകങ്ങളാക്കുക (Factorise):—

(a) $a^2 - 4b^2 - 4bc - c^2$.

(b) $x^2 + 5x - 84$.

(c) $q + p + q + 1$. — 6

II. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക (Solve):—

(a) $2x + 3y = 28$; $3x = 4y - 9$.

(b) $\frac{(2x+3)}{11} + 2 = \frac{(2x-1)}{22} + \frac{(x+3)}{6}$.

(c) $\left(\frac{x}{3} + 2\right)\left(3x - \frac{2}{3}\right) = 0$. — 7

III. (a) ഉത്തമഭാജകം (H. C. F.) കാണുക:—

$a^2 - 3a - 18$; $a^2 + 5a + 6$

(b) $\frac{x}{2y} = 3$ ആയാൽ $\frac{x+y}{y}$ ന്റെയും $\frac{x-y}{x+2y}$ ന്റെയും വിലകൾ കാണുക.

(c) ലഘൂകരിക്കുക (Simplify):—

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1}$$ — 9

IV. ഒരു യാത്രക്കാരൻ ഒരു നിശ്ചിതവേഗത്തിൽ 75 മൈൽ ദൂരം സൈക്കിൾ ഓടിച്ചുപോകുന്നു. മണിക്കൂറൊന്നിനു 3 മൈൽ വീതം കുറഞ്ഞ വേഗത്തിൽ ഓടിച്ചുപോയാൽ അയാൾ അതേയാത്രക്ക 1 മ. 15 മി. കൂടുതൽ സമയം എടുക്കുമായിരുന്നു. എന്നാൽ അയാൾ എന്തു വേഗതയിലാണു് യാത്ര ചെയ്തതു്? 7

V. ഒരു സംഖ്യയിലുള്ള രണ്ടക്കങ്ങളുടെ തുക 10. അക്കങ്ങളെ പരസ്പരം സ്ഥാനം മാററിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ ആദ്യത്തേതിൽ നിന്നും 36 കുറവാണു്. എന്നാൽ സംഖ്യ എന്തു? 6

PART B

VI. (*a*) ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമായാൽ അവയ്ക്കെതിരെ കിടക്കുന്ന കോണുകൾരണ്ടും തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു് തെളിയിക്കുക.

(*b*) ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ ABയും ACയും നീളത്തിൽ തുല്യമാണു്. AB യിൽ D എന്നും, AC യിൽ E എന്നും ഉള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ എടുത്തു് യോജിപ്പിച്ചപ്പോൾ DE എന്ന രേഖ BCയ്ക്കു് സമാന്തരമായിരുന്നാൽ DAയും AE യും സമമാണെന്നു് തെളിയിക്കുക. 8

VII. (*a*) ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങൾ സമവും (equal) സമാന്തരവു (parallel) മായാൽ അതു ഒരു സമാന്തരികമായിരിക്കുമെന്നു് (parallelogram) തെളിയിക്കുക. 8

(*b*) $ABCD$ എന്ന ലംബകത്തിൽ (trapezium) AB യും DC യും സമാന്തരവശങ്ങളാണു്. AD എന്ന വശത്തിൻെറ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ P യിൽ കൂടി DC യ്ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ BC യെ Q എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $AB = 3''$, $DC = 5''$ ആയാൽ PQ ൻെറ നീളം കണക്കാക്കുക. 9

VIII (*a*) ഒരു ചാപം (arc) വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാകുന്ന കോണു്, ശേഷമുള്ള പരിധിയിൽ അതേ ചാപം സമ്മുഖമാകുന്ന കോണിൻെറ ഇരട്ടിയായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക. 9

(*b*) $ABCD$ എന്ന ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിൽ (cyclic quadrilateral) $\angle BAD = 84°$ യും $\angle CBD = 32°$യും ആയാൽ $\angle BDC$ യുടെ അളവെന്തു? 8

IX (*a*) $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$, $\angle A = 60°$ അളവുകളുള്ള ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AB എന്ന വശത്തിന്ന് $2''$ നീളമുണ്ടെങ്കിൽ, BC, AC എന്ന വശങ്ങളുടെ നീളമെന്ത്?

(*b*) ഒരു സമരൂപബഹുഭുജത്തിന്റെ (regular polygon) ഓരോ ആന്തരകോണം (interior angle) $140°$ വീതമായാൽ ആ ബഹുഭുജത്തിന്ന് എത്ര വശങ്ങളുണ്ട്?

(*c*) $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n+1}{2}$, $\sqrt{n}$ ഈ സംഖ്യകൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളായിരിക്കുമെന്നു കാണിക്കുക. 10

PART C

X. (*a*) $AB = 1{\cdot}9''$, $AD = 2{\cdot}4''$, $BC = 2{\cdot}1''$, $AC = 3{\cdot}2''$, $DC = 1{\cdot}5''$ എന്ന അളവുകളിൽ $ABCD$ എന്ന ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്ന് തുല്യമായ വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ പാദവും (base) ഉന്നതിയും (altitude) അളന്ന് വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക.

(*b*) $AB = 2{\cdot}1''$, $BC = 2{\cdot}6''$, $AC = 2{\cdot}3''$ എന്ന അളവുകളിൽ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, A, B, C എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം (circle) നിർമ്മിക്കുക. അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം (radius) അളന്നെഴുതുക. നിർമ്മിതി എഴുതേണ്ടതില്ല. ക്രിയാരേഖകൾ വ്യക്തമാക്കി കാണിച്ചിരുന്നാൽ മാത്രം മതിയാകുന്നതാണ്). 10

ഉത്തരങ്ങൾ

I (a) $(a+2b+c)(a-2b-c)$; (b) $(x+12)(x-7)$; (c) ചോദ്യം $pq+p+q+1$ എന്നാണെങ്കിൽ ഉത്തരം $(p+1).(q+1)$

II (a) 5,6' (b) 16 (c) -6, $\frac{2}{9}$.

III (a) $a+3$. (b) $7, \frac{1}{2}$. (c) $\frac{4}{x+1}$

IV 15മൈ.

V 73.

VI (a) വാക്യം. (b) $\angle ADE = \angle B$; $\angle AED = \angle C$; $\therefore \angle ADE = \angle AED$; $\therefore AD = AE$.

VII (a) വാക്യം. (b) 4".

VIII (a) വാക്യം 5, പുറം 123. (b) 52°.

IX (a) 3·46", 4". (b) 9. (c) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + (\sqrt{n})^2$.

X (a) ക്രിയ. (b) ക്രിയ 1, പുറം 117.

VARIYOTE PUBLICATIONS

PRAKASH PRESS : TRIVANDRUM

Mathematics Books

By G. Ramanatha Iyer B. A., L. T.

ഗണിതപാഠാവലി

ഒന്നാം ഭാഗം മുതൽ ആറാം ഭാഗംവരെ

(For Forms I to VI)

സംഖ്യാഗണിതം

ഒന്നാം ഭാഗം മുതൽ അഞ്ചാം ഭാഗംവരെ

(പ്രൈമറി ക്ലാസ്സുകളിലേക്ക്)

Everyday Science Books

By G. Ramanatha Iyer B. A., L. T.

ശാസ്ത്രവേദി

ഒന്നും, രണ്ടും, മൂന്നും ഭാഗങ്ങൾ

(For Forms IV, V, VI)